Die Optimierung linearer Investitions- und Finanzplanungsmodelle mit ausgewählten Verfahren der ganzzahligen Programmierung

Dissertation
zur Erlangung des
wirtschaftswissenschaftlichen Doktorgrades
der
Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Hans Wegener
aus Wolmirstedt

Göttingen 1973

Die Optimierung linearer Investitions- und Finanzplanungsmodelle mit ausgewählten Verfahren der ganzzahligen Programmierung

Dissertation
zur Erlangung des
wirtschaftswissenschaftlichen Doktorgrades
der
Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Hans Wegener
aus Wolmirstedt

Göttingen 1973

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Berichterstatter: Professor Dr. Jürgen Bloech
Mitberichterstatter: Professor Dr. Wolfgang Lücke

Tag der mündlichen Prüfung: 6. Juli 1973

Inhalt

		Seite
1	Einführung	1
2	Planung von Finanz- und Investitionsentscheidungen im Investitionsmodell	5
21	Definition und Begriff der Investition	5
22	Abbildung der Investition im Investitionsmodell	11
23	Definition und Begriff der Finanzierung	14
24	Abbildung von Finanzierungsvorgängen im Investitionsmodell	16
25	Fragestellung der herkömmlichen Investitionsmodelle	17
251	Vorteilhaftigkeit einer Investition	17
252	Beurteilung konkurrierender Investitionen	19
253	Ermittlung des optimalen Ersatzzeitpunktes einer Investition	2o
26	Diskussion der Fragestellung herkömmlicher Investitionsmodelle	21
27	Planung von Investitionsprogrammen	23
271	Struktur produktionswirtschaftlicher Investitionsmodelle	23
272	Struktur finanzwirtschaftlicher Investitionsmodelle	26
2721	Investitionsprogramm	26
2722	Finanzierungsprogramm	28
28	Darstellung finanzwirtschaftlicher Investitionsmodelle der linearen Programmierung	32
281	Modell mit der Zielfunktion der Kapitalwertmaximierung	32

Seite

2811 Darstellung des Modells 32

2812 Diskussion des Modells der Kapitalwertmaximierung 44

2813 Ausführungen zum Kalkulationszinsfuß in linearen Investitionsmodellen 45

2814 Bestimmung des Kalkulationszinsfußes aus einem linearen Investitionsmodell mit Hilfe des KUHN-TUCKER-Theorems 48

282 Modell mit der Zielfunktion der Endwertmaximierung 59

2821 Darstellung des Modells 59

2822 Diskussion des Modells mit der Zielfunktion der Endwertmaximierung 67

3 Darstellung und simultane Lösung eines linearen finanzwirtschaftlichen Investitionsmodells 69

31 Prämissen und Struktur des Modells 69

311 Prämissen des Modells 69

3111 Planungszeitraum 69

3112 Zahlungsreihenprämisse und Zurechnungsproblem 74

312 Struktur des Modells 75

3121 Modellvariable 75

31211 Investitionsvariable 75

31212 Finanzierungsvariable 78

31213 Finanzanlagevariable 83

3122 Zielfunktion 83

31221 Wahl der Zielfunktion 83

31222 Aufstellung der Zielfunktion 89

Seite

313 Nebenbedingungen 93

3131 Liquiditätsbedingungen 93

3132 Kapazitätsbedingungen 1o5

31321 Kapazitätsbedingung für die Investitionsvariablen 1o5

31322 Kapazitätsbedingung für die Finanzierungsvariablen 1o6

31323 Nichtnegativitätsbedingung für die Variablen 1o8

32 Zusammenstellung der Modellelemente 1o8

33 Beispiel und Lösung eines finanzwirtschaftlichen Investitionsmodells 113

4 Lösung eines mathematisch formulierten finanzwirtschaftlichen Investitionsmodells unter Berücksichtigung von Ganzzahligkeitsbedingungen für die Modellvariablen 119

41 Notwendigkeit der Berücksichtigung der Ganzzahligkeitsbedingung im finanzwirtschaftlichen Investitionsmodell 119

42 Problemstellung der ganzzahligen linearen Programmierung 122

43 Verfahren der ganzzahligen linearen Programmierung 124

431 Exkurs: Duale Simplexmethode 127

4311 Primal - Dualbeziehungen 127

4312 Beschreibung der dualen Simplexmethode 134

4313 Formaler Ablauf der dualen Simplexmethode 136

432 Verzweigungsverfahren 138

4321 Idee der Verzweigungsverfahren 138

4322 Verfahren LAND and DOIG 14o

43221 Beschreibung des Verfahrens 14o

43222 Beurteilung des Verfahrens LAND and DOIG 15o

Seite

4323 Verfahren DAKIN 152

43231 Beschreibung des Verfahrens 152

43232 Beurteilung des Verfahrens DAKIN 163

43233 Modifikation zum Verfahren DAKIN 165

433 Schnitthyperebenenverfahren 182

4331 Idee der Schnitthyperebenenverfahren 182

4332 Fractional Integer Programming Algorithmus (GOMORY) 193

43321 Beschreibung des Verfahrens 193

43322 Konstruktion der Schnitthyperebenen 196

4333 Dualer All-integer Integer Algorithmus (GOMORY) 2o2

43331 Beschreibung des Verfahrens 2o2

43332 Konstruktion der Schnitthyperebenen 2o5

43333 Auswahl von λ 2o9

43334 Vergleich der beiden Verfahren von GOMORY 218

4334 Verfahren von DANTZIG 221

43341 Beschreibung des Verfahrens 221

43342 Konstruktion der Schnitthyperebenen 222

43343 Beurteilung des Verfahrens von DANTZIG 225

4335 Primaler All-integer Integer Algorithmus 226

43351 Beschreibung des Verfahrens 226

43352 Konstruktion der Schnitthyperebenen 227

43353 Beurteilung des primalen All-integer Integer Algorithmus 232

Seite

4336 Verfahren des Intersection-cut 234

43361 Beschreibung des Verfahrens 234

43362 Konstruktion der Schnitthyperebenen 239

43363 Beispiel und graphische Darstellung 246

43364 Beurteilung des Intersection-cut-Verfahrens 253

4337 Diskussion der Schnitthyperebenenverfahren 254

44 Anwendung des modifizierten Verfahrens von DAKIN zur simultanen Lösung eines ganzzahligen Investitions- und Finanzierungsproblems 257

5 Zusammenfassung 267

Literaturverzeichnis 271

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534919_0035

1 Einführung

Durch die zunehmende Anlagenintensität[1] in vielen Industriezweigen, den technischen Fortschritt der letzten Jahre, die Expansion der Wirtschaft und der damit verbundenen wachsenden Bedeutung der betrieblichen Investitionsplanung, sind Investitionsprobleme und Investitionsplanungen zu einem wichtigen Pfeiler der Betriebswirtschaftslehre geworden.

Die Investitionsplanung läßt sich nicht mehr allein als isolierbarer Vorgang in der Unternehmung betrachten; eine Darstellung, die lediglich die Analyse und den Ablauf des Investitionsvorgangs zum Inhalt hat, geht an der betrieblichen Realität vorbei. Vielmehr muß die Planung alle Auswirkungen der Investitionsentscheidungen[2] auf andere Betriebsbereiche erfassen und versuchen, die übrigen Planungsbereiche in den Entscheidungsprozeß mit einzubeziehen.

Die Investitionsentscheidungen wirken sich auf fast alle übrigen Betriebsbereiche aus; besonders starke Interdependenzen bestehen darüber hinaus zwischen der Investitionsentscheidung und den Möglichkeiten der Finanzierung des ausgewählten Investitionsprogramms.

---

[1] Vgl. PACK, L.: Betriebliche Investition. Begriff-Funktion-Bedeutung-Arten. Wiesbaden 1959, S. 5. PACK sieht die zunehmende Anlagenintensität einerseits in der Erweiterung der vorhandenen Kapazitäten und andererseits als Mittel zur Verbesserung der Produktivität.

[2] Unter Entscheidung soll hier die Festlegung der dem Entscheidenden zur Verfügung stehenden Handlungsfolgen unter Beachtung von gegebenen Bedingungen verstanden werden. Diese Bedingungen sind vom Entscheidungssubjekt kurzfristig nicht zu beeinflussen. Vgl. zum Entscheidungsbegriff auch Art. Entscheidungsmodelle (W. DINKELBACH), In: Handwörterbuch der Organisation. Hrsg. v. E. GROCHLA, Stuttgart 1959, Spalte 485. Zur Charakterisierung von Entscheidungen vgl. auch Art. Entscheidung (O. GRÜN). In: Handwörterbuch der Organisation. Hrsg. v. E. GROCHLA, Stuttgart 1959, Spalte 474-484.

Die vorliegende Untersuchung geht daher davon aus, daß die zu treffenden Investitionsentscheidungen auch in starkem Maße von den Finanzierungsmöglichkeiten der Unternehmung abhängen[1], so daß die zu planenden Entscheidungen auf einem simultan zu bestimmenden Investitions- und Finanzierungsprogramm beruhen sollten.

Durch die Vielschichtigkeit und Mannigfaltigkeit der Investitionsmöglichkeiten und Finanzierungsformen wird es für eine theoretisch wissenschaftliche Durchdringung des Investitions- und Finanzierungsphänomens unerläßlich, die betrieblichen Strukturen in einem ökonomischen Modell[2] abzubilden und den

---

[1] Diese Annahme muß besonders bei Großinvestitionen als realistisch angesehen werden. Vgl. ALBACH, H.: Investition und Liquidität. Die Planung des optimalen Investitionsbudgets. Wiesbaden 1962, S. 22. KRELLE, W.: Diskussionsbeitrag. In: Kapitalbildung und Kapitalverwendung. Schriften des Vereins für Sozialpolitik, Bd. 5, Berlin 1953, S. 1o7. SCHINDLER, H.: Investitionsrechnungen in Theorie und Praxis. 3. Aufl., Meisenheim/Glan 1966, S. 172.

[2] Ein ökonomisches Modell kann als vereinfachte Abbildung der ökonomischen Realität angesehen werden; entsprechend stellt ein betriebliches Modell eine Approximation der betrieblichen Wirklichkeit bzw. eines Ausschnitts der betrieblichen Wirklichkeit dar. Vgl. u.a. ANGERMANN, A.: Industrielle Planungsrechnung. Bd. 1, Entscheidungsmodelle. Frankfurt/M., 1963, S. 13. EICHHORN, W.: Die Begriffe Modell und Theorie in der Wirtschaftswissenschaft (Teil 1). In: WiSt, Wirtschaftswissenschaftliches Studium. Jg. 1 (1972), S. 281-288, bes. S. 283. HEINEN, E.: Einführung in die Betriebswirtschaftslehre. Wiesbaden 1968, S. 15. SCHNEIDER, E.: Einführung in die Wirtschaftstheorie, IV. Teil, Bd. 1, 2. Aufl., Tübingen 1965, S. 1. Die Approximation bzw. Vereinfachung der betrieblichen Realität kommt dadurch zum Ausdruck, daß aus der Vielzahl der betrieblichen Interdependenzen nur diejenigen herausgegriffen und analysiert werden, die für den Entscheidungsprozeß relevant sind und die betrieblichen Faktoren vernachlässigt werden, die keinen Einfluß auf den Entscheidungsprozeß ausüben. Das Problem bei dem Aufbau eines realitätsnahen Modells liegt daher vor allem in der Berücksichtigung und vollständigen Erfassung der betrieblichen Beziehungen und Faktoren. Diese Erfassung stößt besonders dann auf Schwierigkeiten, wenn die Beziehungen qualitativer Art sind und nicht quantitativ abgebildet werden können.Vgl. ANGERMANN, A.: Industrielle Planungsrechnung, Bd. 1, Entscheidungsmodelle, a.a.O., S. 13 f. Zur Transformation realer Probleme in mathematisch formulierte Probleme, die mit Hilfe mathematischer Verfahren gelöst werden, vgl. auch MÜLLER-MERBACH, H.: Operations Research. Methoden und Modelle der Optimalplanung. 2. neubearb. und erweiterte Aufl., München 1971, S.14.

Entscheidungsprozeß, der zur Entscheidungsvorbereitung führen soll, in dem Entscheidungsmodell zu vollziehen.

Die Komplexität der betrieblichen Beziehungen, deren Abbildung in einem Modell immer noch eine nur schwer erfaßbare Mannigfaltigkeit aufweisen kann und die besonders engen Beziehungen zwischen den Investitions- und Finanzierungsentscheidungen sollen unsere Untersuchungen auf die Verknüpfungen, die zwischen einem Investitions- und Finanzierungsprogramm bestehen, beschränken.

Diese Betrachtungsweise erfordert die Bestimmung eines simultan zu ermittelnden Investitions- und Finanzierungsprogramms, das unter Berücksichtigung eines ausgewählten Zielkriteriums ein betriebliches Teiloptimum gewährleistet und mit Hilfe der Methoden der linearen Planungsrechnung berechnet werden kann.

Um der betrieblichen Realität gerecht zu werden, erfordert das optimale Investitions- und Finanzierungsprogramm die Berücksichtigung von Ganzzahligkeitsbedingungen mindestens für die Investitionsvariablen[1], so daß entsprechende Ganzzahligkeitsalgorithmen zur Lösung herangezogen werden müssen.

---

[1] Die Ganzzahligkeit der Lösungswerte der Finanzierungsvariablen kann unter den aufzustellenden Prämissen ebenfalls erzwungen werden. Vgl. Kapitel 44.

Die vorliegende Arbeit hat sich zum Ziel gesetzt, einen Beitrag zur Diskussion von finanzwirtschaftlichen Investitionsentscheidungen zu liefern. Durch die Entwicklung und Analyse einer quantitativ bestimmten Investitionsplanung sowie die Berücksichtigung von Ganzzahligkeitsbedingungen für die Lösungswerte der betrachteten Variablen haben die Investitionsmodelle eine stärkere Realitätsnähe erhalten[1]. Die von der betrieblichen Realität aufgezwungenen Ganzzahligkeitsbedingungen erfordern daher auch die Untersuchung entsprechender Ganzzahligkeitsalgorithmen auf ihre Eignung zur Lösung der angesprochenen Probleme.

Die folgende Betrachtung geht von der Diskussion herkömmlicher Investitionsmodelle aus und analysiert kritisch deren Fragestellungen. Eine sich daran anschließende Darstellung einiger simultaner Investitions- und Finanzierungsmodelle, die sich im wesentlichen durch die Art der Zielfunktion unterscheiden, führt zu einer eigenen Formulierung eines linearen finanzwirtschaftlichen Investitionsmodells, das zunächst ohne die Berücksichtigung von Ganzzahligkeitsbedingungen aufgestellt und an Hand eines Beispiels gelöst wird.

Auf die Notwendigkeit der Einfügung von Ganzzahligkeitsrestriktionen in ein Investitionsmodell wird in der Literatur oft hingewiesen.

---

[1] Erst die Entwicklung der ersten brauchbaren Ganzzahligkeitsalgorithmen zur Lösung von Modellen mit Ganzzahligkeitsbedingungen Ende der fünfziger Jahre ließ eine praxisnähere Betrachtungsweise von Investitionsmodellen zu. Durch die Komplexität praxisorientierter simultaner Modelle wird eine manuelle Modelldurchrechnung undenkbar, so daß die rasche Entwicklung auf dem Gebiet der elektronischen Datenverarbeitungsanlagen die praktische Bearbeitung der Investitionsprobleme und deren Lösungsmöglichkeiten wesentlich gefördert hat.

Dagegen findet man die Darstellung der Probleme bei der simultanen Lösung ganzzahliger Investitions- und Finanzierungsprobleme durch Rechenverfahren der Unternehmensforschung selten.

Als Lösungsverfahren werden Ganzzahligkeitsalgorithmen aus der Gruppe der Verzweigungs- und Schnitthyperebenenverfahren ausgewählt, von denen das am geeignetesten erscheinende Verfahren zur Lösung des Beispiels der simultanen Investitions- und Finanzplanung herangezogen wird.

2 Planung von Investitions- und Finanzierungsentscheidungen im Investitionsmodell

21 Definition und Begriff der Investition

In der Literatur findet sich eine Fülle von Investitionsbegriffen[1], die u.a. damit zu erklären ist, daß der Investitionsvorgang aus den unterschiedlichsten Perspektiven z.B. aus betriebswirtschaftlicher, volkswirtschaftlicher oder juristischer Sicht[2] analysiert werden kann.

Die vorliegende Untersuchung befaßt sich lediglich mit betriebswirtschaftlichen Aspekten der Investitionsplanung, so daß in diesem Rahmen nur eine Begriffsbestimmung

---

[1] Vgl.u.a. HEINEN, E.: Zum Begriff und Wesen der betriebswirtschaftlichen Investition. In: Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis, Jg. 9 (1957), S. 16-31 u. S. 85-93. PACK, L.: Betriebswirtschaftliche Investition, a.a.O., S. 13 ff.

[2] Vgl. GAS, B.: Wirtschaftlichkeitsrechnung bei immateriellen Investitionen. Diss. Göttingen 1972, S. 3.

im Hinblick auf die betriebswirtschaftliche Fragestellung als geeignet anzusehen ist.

Unter Beachtung dieses Gesichtspunktes soll unter einer betriebswirtschaftlichen Investition die Transformation von Zahlungsmitteln in konkrete Werte[1] bzw. die Umwandlung von Geldkapital in Betriebsgüter[2] verstanden werden.

Bei Hinzuziehung der Bilanzgliederung bezeichnet die betriebswirtschaftliche Investition den Vorgang der Umwandlung von Kapital in Vermögensgüter[3], wobei besonders die

---

1 Vgl. BLOECH, J.: Untersuchung der Aussagefähigkeit mathematisch formulierter Investitionsmodelle mit Hilfe einer Fehlerrechnung. Diss. Göttingen 1966, S. 1.

2 Vgl. HAX, K.: Die Kapitalwirtschaft des wachsenden Industrieunternehmens. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Jg. 16 (1964), S. 252.

3 Diese Definition geht über den von PACK gebrauchten Investitionsbegriff hinaus, unter dem "... die Verausgabung finanzieller Mittel für die Beschaffung aller konkreten Werte, deren ein Betrieb im Rahmen seiner wirtschaftlichen Tätigkeit bedarf" /PACK, L.: Betriebliche Investition, a.a.O., S. 83_7 verstanden wird, da außer einem betriebsbedingten Erwerb von Vermögensgütern auch nicht betriebsbedingte Finanzinvestitionen im Modell erfaßt werden sollen.
Einen Beitrag zur Diskussion der in der Literatur gebrauchten Investitionsbegriffe zu leisten kann nicht Sinn dieser Arbeit sein, so daß auf die entsprechende Literatur verwiesen werden soll. Vgl. dazu neben den vorerwähnten Literaturstellen u.a.: BRANDT, H.: Investitionspolitik des Industriebetriebs, Wiesbaden 1959, S. 11. HAX, K.: Die Kapitalwirtschaft des wachsenden Industrieunternehmens, a.a.O., S. 252-279, bes. S. 252. SCHNEIDER, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, Theorie der Investition, 4. durchges. Aufl., Tübingen-Zürich 1962, S. 1. SCHWARZ, H.: Optimale Investitionsentscheidungen, München 1967, S. 15. BALLMANN, W.: Beitrag zur Klärung des betriebswirtschaftlichen Investitionsbegriffs und zur Entwicklung einer Investitionspolitik der Unternehmung. Diss. Mannheim 1954, S. 7 ff. BOULDING, K.-E.: Time and Irvestment. In: Economica, Vol. 3 (1936), S. 196. D. SCHNEIDER stellt eine Beziehung zwischen dem Investitions- und Finanzierungsbegriff her, indem beide Begriffe durch Zahlungsströme definiert werden. Eine Investition wird als Zahlungsstrom beschrieben, der mit einer Ausgabe beginnt, während eine Finanzierung ebenfalls durch einen Zahlungsstrom abgebildet wird, der jedoch mit einer Einnahme beginnt. Vgl. SCHNEIDER, D.: Investition und Finanzierung. Lehrbuch der Investitions-, Finanzierungs- und Ungewißheitstheorie, Köln-Opladen 1970, S. 137 f.

langfristigen Vermögensgüter und die langfristigen Kapitalpositionen der Betrachtung unterliegen.

Faßt man die einzelnen Positionen der Bilanz[1] zu großen Gruppen zusammen, kann der Investitionsvorgang graphisch grob veranschaulicht werden:

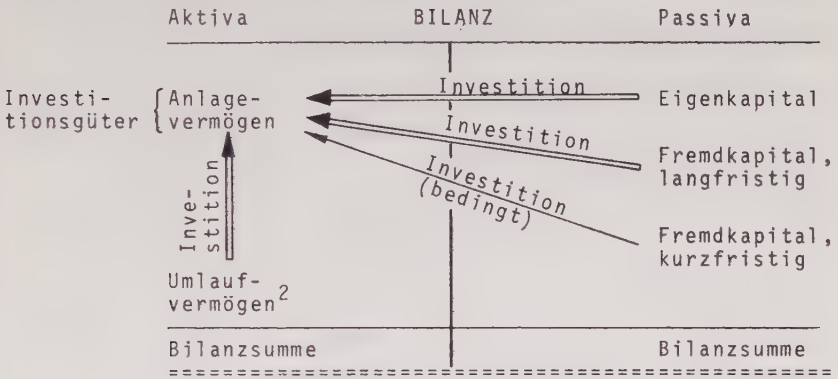


Abb. 1

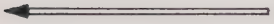
---

[1] Die einzelnen Positionen der Bilanz sind in der Gliederungsvorschrift für Aktiengesellschaften im § 151 Aktiengesetz vom 6. September 1965 zusammengestellt.

[2] Interne Finanzierungsvorgänge, wie z.B. Finanzierung aus Aufwandsgegenwerten bzw. Finanzierung aus nicht ausgeschütteten Gewinnen, deren Transformationen auch zu Vermögenswerten führen können, sollen bei dieser Darstellungsart nicht explizit erfaßt werden. Lediglich die Transformation des Umlaufvermögens in Anlagevermögen, die aus dem Reinvestitionsvorgang resultieren kann, indem die aus den Investitionen zurückgeflossenen Zahlungsmittel sofort wieder investiert werden, finden auf der Aktivseite der Bilanz Berücksichtigung. Dagegen werden Investitionen, die das Umlaufvermögen berühren, nicht weiter gesondert betrachtet.
Besonders PACK bezieht auch die Beschaffung von Umlaufgütern in den Investitionsbegriff mit ein, so daß sich Investitionen auch auf kurzfristige Prozesse erstrecken können. Vgl. hier PACK, L.: Betriebliche Investition, a.a.O., S. 51 ff.
Diese weite Auffassung des Investitionsbegriffes findet in der Literatur keine ungeteilte Zustimmung. Vgl. bes. SCHINDLER, H.: Investitionsrechnung in Theorie und Praxis, a.a.O., S. 4. FLEIG, W.: Investitionsmodelle als Grundlage der Investitionsplanung. Diss. Frankfurt/M. 1965, S. 1o. FLEIG sieht geschaffene Güter nur dann als Investition an, wenn ihre Nutzung der Unternehmung nicht nur momentan, sondern auch in Zukunft zur Verfügung steht.

Transformation von langfristigem Kapital in Anlagevermögen

Transformation von kurzfristigem Kapital in Anlagevermögen[1]



Transformation von Umlaufvermögen in Anlagevermögen

Wird der weite Begriff der Investition toleriert, der die betriebsbedingten Ausgaben für das gesamte Vermögen umfaßt[2], dann sind Investitionsentscheidungen immer Entscheidungen über die Höhe und Struktur des Vermögens der Unternehmung bzw. über die Zusammensetzung der Aktivseite der Bilanz[3]. Bezieht man den Investitionsbegriff jedoch nur auf das Anlagevermögen und klammert Entscheidungen über kurzfristige Vermögensgüter weitgehend aus der Investitionsentscheidung aus, erhält man einen sinnvollen globalen Inhalt des Begriffs der Investitionsentscheidung, bei dem zeitliche Aspekte, die den Zeitpunkt der Investition und Desinvestition berühren, bisher vernachlässigt sind[4].

---

1 Die Finanzierung des Anlagevermögens durch kurzfristiges Fremdkapital kann aus Gründen der Fristenkongruenz nur bedingt in Betracht gezogen werden.

2 Dieser Investitionsbegriff erfährt noch eine Erweiterung, wenn unter Investition alle betriebsbedingten Ausgaben verstanden werden. In diesem Falle werden auch 'Investitionsgüter' geschaffen, die nicht als Position in der Bilanz erscheinen. Vgl. zu diesem Investitionsbegriff LÜCKE, W.: Investitionsrechnung - aber wie? In: Der Volkswirt, Wirtschafts- und Finanzzeitung. Jg. 19 (1965), S. 152.

3 Vgl. SWOBODA, P.: Investition und Finanzierung, Göttingen 1971, S. 13.

4 Durch die spätere Einbeziehung einperiodiger Finanzanlagen in die Investitionsplanung (vgl. Kapitel 31213) sollen in unserer Betrachtung auch derartige Ausgaben unter den Investitionsbegriff fallen.

Durch die offensichtliche Interdependenz der Aktiv- und Passivseite der Bilanz zeigt sich auch hier die enge Verknüpfung zwischen der finanziellen Sphäre und dem Investitionsbereich, die in einem Investitionsmodell ihre Berücksichtigung finden muß.

Bei einer Klassifizierung der Investition nach der Art der geschaffenen Vermögensgüter gelangt man zu folgender Einteilung:

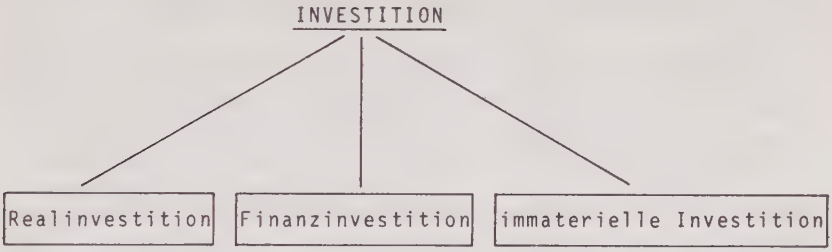


Abb. 2

Diese Unterscheidung wird nicht durch die die Investition charakterisierenden Zahlungsströme getroffen, sondern ergibt sich allein durch eine Betrachtung der beschafften Vermögensgüter[1].

Unter einer Realinvestition soll die Umwandlung von Kapital in Produktionsanlagen verstanden werden, wodurch eine materielle Werteveränderung erreicht wird. Die so geschaffenen Investitionsgüter werden in den betrieblichen Leistungsprozeß eingegliedert.

---

[1] Vgl. WITTE, E.: Forschung, Werbung und Ausbildung als Investitionen. In: Hamburger Jahrbuch für Wirtschafts- und Gesellschaftspolitik. Hrsg. v. O. ORTLIEB, Bd. 7, Tübingen 1962, S. 211. GAS, B.: Wirtschaftlichkeitsrechnung bei immateriellen Investitionen, a.a.O., S. 7.

Finanzinvestitionen bezeichnen dagegen die Umwandlung von Kapital in Finanzanlagen, wie z.B. Beteiligungen, den Erwerb von Aktien oder den Kauf anderer Kapitalpapiere[1].

Immaterielle Investitionen geben die Umwandlung von Kapital in Werte wieder, die sich nicht in einer "sichtbaren Substanz"[2] ausdrücken, sondern sich vor allem in Forschungs-, Werbungs- und Ausbildungsbeiträgen niederschlagen[3]. Diese Investitionsgüter sind nicht direkt am Leistungsprozeß beteiligt, eröffnen jedoch in vielen Fällen neue betriebliche Wege und Möglichkeiten[4].

Die folgende Betrachtung widmet sich vor allem den Realinvestitionen in Form von Anlagen bzw. Maschinen, da diese in industriellen Produktionsunternehmen - z.B. im Gegensatz zu Bankunternehmen - in der Investitionsplanung vorherrschende Bedeutung erlangen. Die Planung von Finanzinvestitionen wird nur dann relevant, wenn aus betrieblichen Gründen - wie z.B. Kapazitätsgründen - eine Verwendung zur Verfügung stehender Finanzmittel zum Zwecke von Realinvestitionen nicht vorgenommen werden

---

1 Eine Gegenüberstellung der typischen Merkmale von Realinvestitionen und Finanzinvestitionen findet sich bei PETERS, G.: Ziele und Methoden der dynamischen Investitionsrechnung. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 41 (1971), S. 335-352, hier S. 339.

2 WITTE, E.: Forschung, Werbung und Ausbildung als Investitionen, a.a.O., S. 211.

3 Vgl. WITTE, E.: Forschung, Werbung und Ausbildung als Investitionen, a.a.O., S. 211.

4 Hierbei wird vor allem an den Erwerb von Patenten, Rechten und Lizenzen gedacht, die den Einsatz neuer und fremder Verfahren im Leistungsprozeß ermöglichen. Eine genauere Untersuchung immaterieller Investitionen gibt GAS, B.: Wirtschaftlichkeitsrechnung bei immateriellen Investitionen, a.a.O.

kann und eine Finanzanlage aus Rentabilitätsgründen erfolgt. Aus diesem Grunde wird die Erfassung von Finanzanlagemöglichkeiten unumgänglich.

22 Abbildung der Investition im Investitionsmodell

Die Planung von Investitionsentscheidungen hängt von vielen Komponenten ab, die die unterschiedlichsten Bereiche - wie z.B. die wirtschaftlichen, technischen und sozialen Bereiche - berühren können.

Bei einer betriebswirtschaftlichen Betrachtung werden lediglich die betriebswirtschaftlichen Elemente erfaßt und analysiert, da eine optimale Investitionsentscheidung aufgrund betriebswirtschaftlicher Entscheidungskriterien gefunden werden soll.

Durch die Abbildung des Investitionsvorganges in einem Entscheidungsmodell gelangt man zu einer abstrahierten Realität, in der die die Entscheidungsfindung nicht beeinflussenden Faktoren vernachlässigt werden.

Die Abbildung des Investitionsproblems in einem mathematisch formulierten quantitativen Entscheidungsmodell bedingt die Möglichkeit, die formulierten Realprobleme in strukturgleiche Formalprobleme zu transformieren[1], um diese einer rechnerischen Lösung zuzuführen.

---

[1] Vgl. MÜLLER-MERBACH, H.: Operations Research. Methoden und Modelle der Optimalplanung, a.a.O., S. 14.

Dies setzt einen Selektionsprozeß voraus, in dem festzustellen ist, welche betrieblichen Einflußgrößen für den betrieblichen Entscheidungsprozeß relevant sind und welche Größen unberücksichtigt bleiben können, da sie den Entscheidungsprozeß nicht beeinflussen.

Als Ergebnis dieses Selektionsprozesses ergeben sich die für das Modell relevanten Variablen, Daten und Verknüpfungen, d.h. daß alle möglichen Handlungsalternativen und deren Interdependenzen erfaßt werden[1] und in das Modell Eingang finden. Um ein angenähert vollständiges Investitionsmodell zu erhalten, muß versucht werden, auch Variablen anderer Planungsbereiche sowohl in ihren Beziehungen untereinander als auch in Hinblick auf die Investitionsvariablen zu berücksichtigen sowie inner- und außerbetriebliche Restriktionen im Modell zu fixieren, um somit die Auswirkungen der Investitionstätigkeit auf andere betriebliche Bereiche zu berücksichtigen und die Maßnahmen simultan abzustimmen[2].

---

[1] Vgl. ENGELS, W.: Betriebswirtschaftliche Bewertungslehre im Licht der Entscheidungstheorie, Köln-Opladen 1962, S. 93-1o5.

[2] Die simultane Planung aller Betriebsbereiche führt zu einem Totalmodell, das wegen seiner Komplexität noch nicht praktikabel ist.
Aus diesem Grunde kann nur die Planung von Partialmodellen, die in eine Gesamtplanung einzubetten sind, der heutigen Realität nahekommen.

Die Wirksamkeit der Investitionsplanung im Investitionsmodell hängt weitgehend von dem Aufbau sowie der Struktur des Modells ab; in weit höherem Maße bestimmt aber die Möglichkeit der Erfassung aller ökonomisch relevanten Faktoren und somit die Güte der betrieblichen Informationsgewinnung die Planungsergebnisse.

Jede Investition wird durch ein "monetäres Bild"[1] gekennzeichnet, das sich aus einer Folge von Zahlungen zusammensetzt. Die aus den Zahlungen resultierenden Zahlungsströme[2] - Einzahlungs- und Auszahlungsströme[3] - erstrecken sich über die gesamte Nutzungsdauer der Investition[4].

---

1 BLOECH, J.: Untersuchung der Aussagefähigkeit mathematisch formulierter Investitionsmodelle mit Hilfe einer Fehlerrechnung, a.a.O., S. 3.

2 Die Frage, ob Zahlungsströme oder Kostengrößen im Rahmen der betrieblichen Investition zu verwenden sind, wurde von LOCKE untersucht. Dabei konnte bei Unterstellung eines Zeitraumes von drei und vier Jahren bewiesen werden, daß die optimale Investitionsentscheidung bei Verwendung von Kosten- und Zahlungsgrößen in beiden Fällen gleich ist. Ein allgemeiner Beweis für eine beliebige Zeitdauer wurde von BLOECH erbracht. Vgl. LOCKE, W.: Investitionsrechnungen auf der Grundlage von Ausgaben oder Kosten? In: Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, N.F. Jg. 7 (1955), S. 31o ff. BLOECH, J.: Untersuchung der Aussagefähigkeit mathematisch formulierter Investitionsmodelle mit Hilfe einer Fehlerrechnung, a.a.O., S. 8 ff.

3 Unter einer Einzahlung soll die Übertragung eines Geldbestandes von außen auf den Betrieb verstanden werden, wodurch die Geldmittelbestände und/oder die Buchgeldbestände erhöht werden.
Als Auszahlung ist der Abfluß von Zahlungsmitteln in Form von Bar- und Buchgeld zu verstehen. Vgl. LOCKE, W.: Finanzplanung und Finanzkontrolle in der Industrie. Systematische Darstellung der Grundlagen. Wiesbaden 1965, S. 17.

4 Diese Annahme schließt nicht aus, daß in einigen Perioden weder Ein- noch Auszahlungen bzw. nur Ein- oder Auszahlungen für das betrachtete Objekt zu verzeichnen sind.

Der Auszahlungsstrom beginnt mit der Anschaffungsauszahlung für das entsprechende Investitionsobjekt. Der Einzahlungsstrom, der in der Regel erst eine Periode später einsetzt, beinhaltet die aus der Desinvestition resultierende Freisetzung der gebundenen Zahlungsmittel.

Die Zahlungsströme werden in einer quantitativ aufgebauten Investitionsrechnung bzw. einem Investitionsmodell erfaßt, wobei aufgrund von Entscheidungsfunktionen oder Zielfunktionen - unter Berücksichtigung der betrieblichen Möglichkeiten - Aussagen hinsichtlich der Kapitalverwendung für Investitionsvorhaben getroffen werden[1].

23 Definition und Begriff der Finanzierung

In der Finanzierungstheorie findet man heute noch keinen einheitlichen Finanzierungsbegriff; vielmehr wird der Begriff Finanzierung in der Literatur zur Bezeichnung unterschiedlicher betrieblicher Tatbestände verwendet.

Dennoch kann eine Entwicklung vom eng gefaßten Finanzierungsbegriff zu einer heute anerkannten weiteren Fassung festgestellt werden.

---

[1] Auf eine Simultanplanung und die Fixierung weiterer Parameter soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Vgl. dazu Kapitel 3.

Der eng gefaßte Finanzierungsbegriff versteht die Finanzierung als Beschaffung von Kapital. Dieser ganz auf die Passivseite der Bilanz abgestellte Finanzierungsbegriff, der sich nur mit einem Vorgang der Finanzierung - nämlich der Kapitalbeschaffung - befaßt, findet seine Erweiterung in der Berücksichtigung der Kapitalrückzahlung im Finanzierungsvorgang[1]. Der heute vorherrschende Finanzierungsbegriff umfaßt dagegen alle Kapitaloperationen und -dispositionen[2], d.h. es werden auch Finanzierungsvorgänge, die sich auf der Aktivseite vollziehen, wie z.B. Vermögensumschichtungen sowie Finanzierungsvorgänge, die aus Positionen der Gewinn- und Verlustrechnung resultieren, wie z.B. Finanzierung aus Abschreibungs- oder Gewinngegenwerten, in den Finanzierungsbegriff einbezogen[3].

Für unsere Betrachtungsweise im Rahmen der Finanzplanung im Investitionsmodell erstreckt sich der Finanzierungsbegriff und die Finanzierungsentscheidung auf die Strategie der Kapitalbeschaffung und der Kapitalrückzahlung; dabei gehen auch die Kapitalkosten und

---

1 Vgl. HAX, K.: Die langfristigen Finanzdispositionen. In: Handbuch der Wirtschaftswissenschaften. Bd. 1: Betriebwirtschaft. Hrsg. v. K. HAX u. Th. WESSELS, Köln und Opladen 1958, S. 464. VORMBAUM, H.: Finanzierung der Betriebe, 2. Aufl., Wiesbaden 1971, S. 2o. Diese Definition wird auch von VORMBAUM als zu eng angesehen, da Kapitalfreisetzungsvorgänge nicht erfaßt werden.

2 Art. Finanzierung (L. BECKMANN). In: Handwörterbuch der Betriebswirtschaft. Hrsg. v. H. SEISCHAB und K. SCHWANTAG. 3. neu bearb. Aufl., Bd. 2, Stuttgart 1958, Spalte 1831.

3 In der amerikanischen Literatur wird der Finanzierungsbegriff zum "financial management" erweitert, das nicht nur die Strategie der Kapitalbeschaffung, sondern darüber hinaus auch die Kapitalverwendung umfaßt. Vgl. WESTON, F.; BRIGHAM, E.F.: Managerial Finance, 3. Aufl., London 197o, S. 4. Vgl. auch DEUTSCH. P.: Grundfragen der Finanzierung im Rahmen der betrieblichen Finanzwirtschaft. Wiesbaden 1962, S. 16.

die Laufzeit der finanziellen Mittel mit in den Planungskalkül ein[1]. Die Kapitalverwendung hingegen wird nicht als Finanzierungsvorgang angesehen; sie ist vielmehr dem Bereich der Investitionsplanung zuzurechnen.

24 Abbildung von Finanzierungsvorgängen im Investitionsmodell

Zum Zwecke einer Finanzplanung, die zum einen eine jederzeitige Zahlungsfähigkeit des Unternehmens und zum anderen möglichst niedrige Finanzierungskosten gewährleisten soll, werden in dem Investitionsmodell alle zur Verfügung stehenden Finanzierungsvariablen erfaßt.

Jeder Finanzierungsvariablen wird der durch sie verursachte Zahlungsstrom zugeordnet, der sich aus den Kapitalrückzahlungsmodalitäten, der Laufzeit sowie den Kapitalkosten ergibt.

Diese Zahlungsströme sind mitbestimmend für die Aufrechterhaltung des finanziellen Gleichgewichts und beeinflussen die Zusammensetzung des optimalen Investitions- und Finanzierungsprogramms.

---

[1] Die Finanzierungsentscheidung erstreckt sich im Regelfall auf die Beziehungen zwischen der Unternehmung und den Kapitalgebern, wobei nicht nur monetäre Aspekte, sondern auch Mitsprache- und Informationsrechte der Kapitalgeber an entscheidender Stelle stehen können. Vgl. SWOBODA, P.: Investition und Finanzierung, a.a.O., S. 13.

25 Fragestellung der herkömmlichen Investitionsmodelle

251 Vorteilhaftigkeit einer Investition

Bevor auf eine simultane Investitionsplanung eingegangen wird, sei die Fragestellung der herkömmlichen Investitionsmodelle aufgezeigt.

Unter dem Begriff der herkömmlichen Investitionsmodelle sollen die Ansätze für die Betrachtung isolierter Investionsobjekte verstanden werden.

Die Modelleinflußgrößen bestehen aus Kosten- und Ertragselementen bzw. Zahlungsströmen, die den Investitionsobjekten während der Nutzungsdauer der Anlagen direkt zugeordnet werden. Einflüsse der Investitionstätigkeit auf andere Betriebsbereiche und Interdependenzen, die zwischen den Investitionsentscheidungen und anderen betrieblichen Sektoren bestehen, bleiben unberücksichtigt, so daß betriebliche Engpässe aus der Betrachtung herausgehalten werden.

Grundsätzlich lassen sich drei große Fragenkomplexe aufzeigen, die den Inhalt der Investitionsrechnungen ausmachen[1]:

1. Vorteilhaftigkeit einer Investition
2. Beurteilung konkurrierender Investitionen
3. Ermittlung des optimalen Ersatzzeitpunktes einer Investition

---

[1] Vgl. JACOB, H.: Neuere Entwicklungen in der Investitionsrechnung. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 34 (1964), S. 487-507, bes. S. 487 ff.

Bei der Vorteilhaftigkeitsprüfung einer Investition werden aufgrund von Prognoserechnungen bzw. Schätzungen alle Zahlungsströme, die das betrachtete Investitionsobjekt während einer Nutzungsdauer verursachen wird, in den einzelnen Perioden erfaßt. Mit Hilfe einer Wirtschaftlichkeitsrechnung, zu denen die Kapitalwertmethode[1], die Methode des internen Zinsfußes[2] und die Annuitätenmethode[3] gezählt werden soll, wird mittels eines ausgewählten Entscheidungskriteriums die Vorteilhaftigkeit bzw. die Unwirtschaftlichkeit des betrachteten Investitionsobjektes an Hand der Zahlungsströme festgestellt.

Als Entscheidungskriterium fungiert - je nach Wahl der entsprechenden Berechnungsgrundlage - der Kapitalwert[4], der interne Zinsfuß[5] oder die Höhe der

---

1,2,3 Die Beschreibung der herkömmlichen Investitionsmodelle findet sich u.a. bei: SCHNEIDER, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung. Theorie der Investition, a.a.O., S. 15 ff. BRANDT, H.: Investitionspolitik des Industriebetriebs, a.a.O., S. 66 ff. FLEIG, W.: Investitionsmodelle als Grundlage der Investitionsplanung, a.a.O., S. 27 ff. KÖHNE, M.: Theorie der Investition in der Landwirtschaft, Hamburg, Berlin 1966, S. 12 ff. SCHINDLER, H.: Investitionsrechnungen in Theorie und Praxis, a.a.O., S. 49 ff. BLOHM, H., LÜDER, K.: Investition. Schwachstellen im Investitionsbereich des Industriebetriebes und Wege zu ihrer Beseitigung. 2. neubearb. Aufl., München 1972, S. 66 ff.

4 Den Kapitalwert einer Investition erhält man durch Diskontierung aller Einzahlungen und Auszahlungen mit einem extern gewählten Kalkulationszinsfuß auf einen bestimmten Zeitpunkt. Der so gewonnene Barwert ist dann positiv, wenn der Barwert der Einzahlungen den Barwert der Auszahlungen übersteigt. In diesem Fall rentiert sich die Investition - bei Unterstellung einer isolierten Betrachtungsweise -, da die erzielte Verzinsung den Kalkulationszinsfuß übersteigt. Vgl. SCHNEIDER, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung. Theorie der Investition, a.a.O., S. 15.

5 Als interner Zinsfuß - internal rate of return - wird der Zinsfuß bezeichnet, bei dem der Kapitalwert der Investition den Wert Null annimmt. Liegt der interne Zinsfuß über dem Kalkulationszinsfuß, ist die betrachtete Investition vorteilhaft. Vgl. SCHNEIDER, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung. Theorie der Investition, a.a.O., S. 1o.

durchschnittlichen jährlichen Ein- und Auszahlungen[1] der betrachteten Investition.

252 Beurteilung konkurrierender Investitionen

Stehen mehrere Investitionsobjekte zur Diskussion, wird mit Hilfe einer der oben angeführten Investitionsrechnungsarten die Wirtschaftlichkeit der zu betrachtenden Objekte separat ermittelt, mit anderen Investitionsmöglichkeiten verglichen[2] und die günstigste Alternative für die Unternehmung ausgewählt.

Bei einem Vergleich der Vorteilhaftigkeit einer Investition mit der konkurrierender Investitionen läßt sich zeigen, daß beide Probleme identisch sind, denn "das Urteil, eine Investition ist vorteilhaft oder ist nicht vorteilhaft, beruht letzten Endes ebenfalls auf einem Vergleich zweier Alternativen, nämlich der Alternative, den verfügbaren Betrag - es möge sich um Eigenmittel handeln - zu investieren, d.h. Produktivfaktoren dafür zu kaufen oder einer Bank oder einem sonstigen Kreditnehmer gegen Zinsen zu überlassen"[3].

---

[1] Die Annuitätenmethode, die auf der Kapitalwertmethode aufbaut, transformiert die Zahlungsströme der einzelnen Perioden in eine uniforme Reihe gleicher Länge. Die Glieder der neu gewonnenen Zahlungsreihe sind identisch und haben den Charakter durchschnittlicher Nettoeinzahlungen. Sind die durchschnittlichen Nettoeinzahlungen größer als Null, kann die betrachtete Investition als wirtschaftlich bezeichnet werden. Vgl. SCHNEIDER, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung. Theorie der Investition, a.a.O., S. 25 ff.

[2] Da sich die zu vergleichenden Investitionsobjekte in der Nutzungsdauer, den zu investierenden Beträgen und den Einzahlungs- und Auszahlungszeitpunkten unterscheiden können, muß noch eine Drittinvestition - die auch als Finanzinvestition aufgefaßt werden kann -, die sogenannte Supplementinvestition, mit in die Betrachtung einbezogen werden. Vgl. dazu HEISTER, M.: Die Rentabilitätsanalyse von Investitionen. Ein Beitrag zur Wirtschaftlichkeitsrechnung, Köln-Opladen 1962, S. 36 ff. MOXTER, A.: Der Einfluß der Amortisationsgeschwindigkeit auf die unternehmerische Investitionsentscheidung. In: Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, Jg. 11 (1959), S. 541 ff.

[3] JACOB, H.: Neuere Entwicklungen in der Investitionsrechnung, a.a.O., S. 488.

253 Ermittlung des optimalen Ersatzzeitpunktes einer Investition[1]

Bereits investierte Objekte lassen mit zunehmendem Alter in ihrer Leistung nach[2] und verursachen in der Regel durch Verschleiß steigende Kosten, die sich durch Reparaturkosten und andere Instandhaltungsmaßnahmen ausdrücken.
Bei einer möglichen isolierten Behandlung dieser Investitionsobjekte können für den Ersatz durch identische bzw. verbesserte Anlagen mit Hilfe einer Wirtschaftlichkeitsrechnung Zeitpunkte bestimmt werden, die in bezug auf das Entscheidungskriterium der Kostenminimierung als optimal anzusehen sind.

---

[1] Vgl. u.a. CHURCHMAN, C.W. u.a.: Operations Research. Eine Einführung in die Unternehmensforschung.4.Aufl.,München-Wien 1968, S. 439 ff. BLOECH, J.: Investitions-Strategien für Fahrzeuge und andere verschleißende industrielle Anlagen. In: Kostenrechnungspraxis. Zeitschrift für Betriebsabrechnung, Kostenrechnung und -planung. Nr. 4 (1969), S. 245 ff. BRIEL, H.v.: Die Ermittlung der wirtschaftlichen Nutzungsdauer von Anlagegütern. Zürich 1955, S. 36 ff. SASIENI, M. u.a.: Methoden und Probleme der Unternehmensforschung. Operations Research. Würzburg 1962, S. 114 ff. SIEBEN, G.: Wie bestimmt man die optimale Nutzungsdauer von Anlagegütern. In: Kostenrechnungspraxis. Zeitschrift für Betriebsabrechnung und -planung. Nr. 3 (1958), S. 13o ff. Eine andere Art von Ersatzmodellen behandeln die Veröffentlichungen von TERBORGH, die auf einen Verfahrensvergleich der gegebenenfalls zu ersetzenden Anlage-Defender- und der gegebenenfalls ersetzenden Anlage-Challenger - abstellen. Vgl. TERBORGH, G.: Dynamic Equipment Policy. New York-Toronto-London 1949. TERBORGH, G.: MAPI Replacement Manual. For the Attainment of a Dynamic Equipment Policy. Chicago (Ill.) and Crawfordsville (Ind.) 195o. TERBORGH, G.: Leitfaden der betrieblichen Investitionspolitik. Deutsche Übersetzung u. Bearbeitung v.H. ALBACH, Wiesbaden 1969. BRIEL, H. v.: Die Ermittlung der wirtschaftlichen Nutzungsdauer von Anlagegütern, a.a.O., S. 1o2 ff. SCHINDLER, H.: Investitionsrechnungen in Theorie und Praxis, a.a.O., S. 75 ff. AHLSDORFF, M.: Probleme des innerbetrieblichen Transportes in betriebstheoretischer Sicht. Diss. Göttingen 1965, S. 156 ff.

[2] Eine weitere Gruppe von Investitionsobjekten, deren Leistungsfähigkeit jedoch nicht kontinuierlich gemindert wird, kann in den "plötzlich versagenden Einheiten" /CHURCHMAN, C.W. u.a.: Operations Research, a.a.O., S. 448/ gesehen werden. Bei diesen Objekten, wie z.B. Glühbirnen, sind optimale Ersatzstrategien unter Verwendung von Ausfallwahrscheinlichkeiten zu entwickeln.

26 Diskussion der Fragestellung herkömmlicher Investitionsmodelle

Will man die Investitionsmodelle als Instrument zur betrieblichen Planung und Entscheidungsfindung verstanden sehen, reicht die Fragestellung der herkömmlichen Investitionsmodelle nicht mehr aus[1].

Eine isolierte Betrachtungsweise, die sich nur mit dem oder den zur Diskussion stehenden Investitionsobjekten auseinandersetzt, vernachlässigt die Auswirkungen und Beziehungen der Investitionstätigkeit zu anderen Betriebsbereichen[2] (wie z.B. dem Finanzierungsbereich) und muß nicht in jedem Fall zu einem betrieblichen Optimum beitragen. Vielmehr müssen alle Entscheidungen an der gesamtbetrieblichen Zielsetzung und den betrieblichen Strukturen orientiert sein. Voraussetzung dafür bildet die Erfassung dieser Strukturen und deren Abhängigkeiten.

Ziel der betrieblichen Planung bleibt daher eigentlich die Optimierung eines betrieblichen Gesamtmodells, in dem Entscheidungen unter dem Gesichtspunkt des Unternehmenszieles und der vorhandenen inner- und außerbetrieblichen Restriktionen zu treffen sind. Ein derartiger Gesamtplan einer Unternehmung, der als umfassendes Ent-

---

[1] Vgl. auch LÖCKE, W.: Investitionsrechnung - aber wie? a.a.O., S. 153.

[2] Eine besonders wirtschaftliche Investition, die z.B. einen sehr hohen Anschaffungswert hat und damit einen hohen Finanzierungsbetrag erfordert, muß bei Nichtbereitstellung der Finanzierungsmittel zugunsten einer weniger wirtschaftlichen - aber finanziell zu realisierenden - Investition zurücktreten.

scheidungsmodell zu formulieren wäre, hätte eine simultane Lösung bzw. Bestimmung der Aktionsvariablen zur Folge.

Durch die Komplexität der einzelnen Betriebsbereiche und die vielseitigen Interdependenzen würde ein derartig konzipiertes Gesamtmodell einen Umfang erhalten, der eine Überschaubarkeit der einzelnen Beziehungen nicht ermöglicht sowie eine Lösung des Modells auf einer elektronischen Rechenanlage zur Zeit kaum gestattet.

Andererseits würde eine zu große Abstrahierung und damit Vereinfachung der Strukturen der einzelnen Betriebsbereiche, die notwendig wäre, um eine ausreichende Praktikabilität und Überschaubarkeit des Modells zu erreichen, ein verfälschtes Bild wiedergeben.

Aus diesen Gründen scheint es geboten, ausgewählte Betriebsbereiche, die sich besonders stark tangieren, zu betrachten, ihre Strukturen zu erfassen und einer simultanen Optimallösung zuzuführen[1].

Unter diesem Gesichtspunkt sind die herkömmlichen Investitionsmodelle als Vorstufe zu einer simultanen Planung anzusehen mit der Aufgabe, unwirtschaftliche Investitionsobjekte von vornherein aus dem Kreis der Modellvariablen des zu optimierenden Modells zu entfernen.

---

[1] Vgl. auch HABERSTOCK, L.: Zur Integrierung der Ertragsbesteuerung in die simultane Produktions-, Investitions- und Finanzierungsplanung mit Hilfe der linearen Programmierung. Köln-Berlin-Bonn-München 1971, S. 27.

27 Planung von Investitionsprogrammen

271 Struktur produktionswirtschaftlicher Investitionsmodelle

Durch die isolierte Betrachtungsweise des Investitionsbereichs mit Hilfe von Investitionsrechnungen kann das betriebliche Optimum leicht verfehlt werden.

Aus diesem Grunde erweitert die moderne Investitionsplanung die obige Betrachtungsweise, indem die Entscheidungen verschiedener Planungsbereiche simultan geplant werden.

Für die Investitionsplanung bedeutet dies, daß im Rahmen eines abgesteckten Planungszeitraumes Investitionsentscheidungen simultan mit Entscheidungen anderer Planungsbereiche zu treffen sind.

Voraussetzung dafür ist die Einbeziehung aller relevanten Variablen und Daten sowie der Interdependenzen der Modellvariablen in die Rechnung, so daß die Auswirkungen von Investitionsentscheidungen auch auf die Variablen anderer Bereiche und die Auswirkungen derer Entscheidungen auf den Investitionsbereich im Modell Berücksichtigung finden.

Die Interdependenzen der Variablen der zu betrachtenden Planungsbereiche sowie die außerbetrieblichen Daten werden in Nebenbedingungen erfaßt.

Mittels einer vorgegebenen Zielfunktion wird ein optimales Programm der betrachteten Betriebsbereiche simultan bestimmt[1].

---

[1] Ein optimales Programm umfaßt die bestmöglichen Lösungswerte der Variablen des Planungsbereichs bzw. der betrachteten Planungsbereiche, wobei sich die Optimalität stets an der formulierten Zielfunktion orientiert.

Wegen der erwähnten Schwierigkeit, alle Betriebsbereiche in einem Modell differenziert zu erfassen und eine Lösung zu ermitteln, sind besonders zwei Gruppen partieller Investitionsmodelle herauszustellen[1], die jeweils die Investitionsentscheidungen und betriebliche Entscheidungen eines anderen Planungsbereichs simultan bestimmen.

Die eine Gruppe kann als produktionsorientierter und die zweite als finanzwirtschaftlicher Investitionsmodelltyp bezeichnet werden.

Die produktionsorientierten Investitionsmodelle[2] berücksichtigen die engen Beziehungen, die zwischen der Investitions- und der Produktionsplanung bestehen und ermitteln simultan ein - gemessen an einer vorgegebenen Zielfunktion - optimales Investitions- und Produktionsprogramm[3], indem die bestmöglichen Lösungswerte der Problemvariablen errechnet werden.

Die Restriktionen des Modells bestehen aus den Beziehungen der Investitions- und Produktionsvariablen untereinander und zu den relevanten betrieblichen und außerbetrieblichen Daten.

---

1 Vgl. SCHWEIM, J.: Integrierte Unternehmensplanung, Bielefeld 1969, S. 32.

2 Mit dem Ansatz dieser Modelle haben sich u.a. vorwiegend befaßt: JACOB, H.: Neuere Entwicklungen in der Investitionsrechnung, a.a.O., S. 487-507 u. S. 551-594. FÜRSTNER, K.; HENN, R.: Dynamische Produktionstheorie und lineare Programmierung. Meisenheim/Glan 1957, S. 1o7 f. MANNE, A.S.: Scheduling of Petroleum Refinery Operations. In: Havard Economic Studies, Vol. 98(1956), S. 158-171. LANGER, H.: Die Bestimmung des optimalen Investitionsprogramms für Mehrproduktbetriebe mit Hilfe des Linear Programming. Diss. Mainz 1962. DINKELBACH, W., HAX, H.: Die Anwendung der gemischt ganzzahligen Programmierung auf betriebswirtschaftliche Entscheidungsprobleme. In: Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, Jg. 14 (1962), S.185 ff. SWOBODA, P.: Die simultane Planung von Rationalisierungs- und Erweiterungsinvestitionen und von Produktionsprogrammen. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 35 (1965), S.148-163.- SEELBACH, H.: Planungsmodelle in der Investitionsrechnung, Würzburg-Wien 1967, S. 9-23.

3 Vgl. auch GUTENBERG, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre. Bd. 1, Die Produktion, 12. Aufl.,Berlin-Heidelberg-New York 1966, S. 181.

Die Erfolgswirksamkeit der Produktionsvariablen läßt sich im allgemeinen durch die Differenz aus den Umsatzerlösen der Produkte und ihren variablen Kosten bzw. durch die von ihnen verursachten Zahlungsströme ermitteln. Hingegen werden die Investitionsobjekte in diesen Modellen meist durch ihre Anschaffungskosten oder -auszahlungen und den zurechenbaren Kosten für die Instandhaltung der Aggregate gekennzeichnet[1]. Die Ertragsseite wird durch die bei einer Desinvestition erzielten Liquidationserlöse berührt[2].

---

[1] Vgl. auch SEELBACH, H.: Planungsmodelle in der Investitionsrechnung, a.a.O., S. 3.

[2] Vgl. besonders das Modell bei JACOB, H.: Investitionsplanung und Investitionsentscheidung mit Hilfe der Linearprogrammierung, 2. erw. Aufl., Wiesbaden 1971, S. 34 ff. u. S. 59 ff.

272 Struktur finanzwirtschaftlicher Investitionsmodelle

2721 Investitionsprogramm

Unter finanzwirtschaftlichen Investitionsmodellen[1] werden die Investitionsmodelle verstanden, die die Planung von Investitions- und Finanzierungsentscheidungen vornehmen und somit vor allem die engen Abhängigkeiten, die zwischen den Investitionsmöglichkeiten und den Finanzierungsalternativen bestehen, berücksichtigen.

---

[1] Die Darstellung quantitativ formulierter Modelle, die die Interdependenzen des Investitions- und Finanzierungsbereichs besonders erfassen, findet man u.a. bei: LORIE, J.H.; SAVAGE, L.J.: Three Problems in Rationing Capital. In: Journal of Business, Vol. 27 (1955), S. 229-239. MASSE, P.; GIBRAT, R.: Application of Linear Programming to Investments in the Electric Power Industry. In: Management Science, Vol. 3 (1957), S. 149-166. MASSE, P.: Le choix des investissements - Critères et méthodes, Paris 1959. WEINGARTNER,H.M.: Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems, 2. Aufl., Englewood Cliffs,(N.J.)1964. ALBACH, H.: Investition und Liquidität. Die Planung des optimalen Investitionsbudgets, a.a.O. Auf das dynamische Modell von ALBACH wird später noch eingegangen. Vgl. Kapitel 281. HAX, H.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Jg. 16 (1964), S. 430-446. LAUX, H.: Flexible Investitionsplanung. Einführung in die Theorie der sequentiellen Entscheidungen bei Unsicherheit. Opladen 1971. HABERSTOCK, L.: Zur Integrierung der Ertragsbesteuerung in die simultane Produktions-, Investitions- und Finanzierungsplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O. BLUMENTRATH, U.: Investitions- und Finanzplanung mit dem Ziel der Endwertmaximierung, Wiesbaden 1969. Die Erfassung der Interdependenzen des Investitions- und Finanzierungsvorgangs wurde schon frühzeitig von DEAN vorgenommen. Durch die Nichtberücksichtigung von Finanzierungs- und Investitionsmaßnahmen zu späteren Zeitpunkten des Planungszeitraumes erhält das Modell jedoch einen statischen Charakter und damit nur eine begrenzte Bedeutung. Vgl. DEAN, J.: Capital Budgeting, 7. Aufl., New York 1964, bes. Kapitel IV, S. 62 ff.

Ziel der Planung mit einem finanzwirtschaftlichen Investitionsmodell, das nur in einer mehrperiodigen Formulierung Bedeutung erlangen kann, muß es sein, im Rahmen eines abgesteckten Entscheidungsfeldes Höhe und Art der Investitionsaktivitäten und Finanzierungsmaßnahmen zu den entsprechenden Zeitpunkten des Planungszeitraumes simultan zu ermitteln, so daß der vorgegebenen Zielfunktion unter Einhaltung von betrieblichen und außerbetrieblichen Restriktionen bestmöglich entsprochen wird.

Dies geschieht in der Weise, daß aus einer Vielzahl von unterschiedlich strukturierten Investitionsobjekten[1] und Finanzierungsmaßnahmen das optimale Investitions- und Finanzierungsprogramm mit Hilfe eines entsprechenden Rechenverfahrens der Unternehmensforschung ermittelt wird.

Die gefundene Lösung stellt aber nur dann das tatsächliche Optimum für die Unternehmung dar, wenn die Möglichkeit der Erfassung aller zur Auswahl stehenden Investitions- und Finanzierungsvariablen in dem Modell[2] gegeben ist.

---

[1] Die unterschiedliche Strukturierung bezieht sich auf die die Investitionen kennzeichnenden Zahlungsströme.

[2] Die Ermittlung aller Alternativen stellt sich als Informationsproblem dar und kann in der Betriebswirtschaftslehre noch nicht als vollständig gelöst angesehen werden. Vgl. SCHNEIDER, D.: Zielvorstellungen und innerbetriebliche Lenkungspreise in privaten und öffentlichen Unternehmen. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, N.F., Jg. 18 (1966), S. 260-275, bes. S. 264. IHDE, G.-B.: Grundlagen der Rationalisierung. Theoretische Analyse und praktische Probleme, Berlin 1970, S. 20.

Die Variablen der nicht berücksichtigten Planungsbereiche seien bereits als fixiert angenommen oder später - ohne Einfluß auf das simultan zu errechnende Investitions- und Finanzierungsprogramm auszuüben - zu ermitteln.

Das optimale Investitionsprogramm basiert auf den der Unternehmung zur Auswahl stehenden Investitionsobjekten. Jedes Investitionsobjekt wird durch Zahlungsströme bzw. durch eine Zahlungsreihe in Form von Einzahlungen und/oder Auszahlungen in den entsprechenden Perioden beschrieben[1].

Zur Berechnung des optimalen Investitonsprogramms müssen alle für das Investitionsprogramm geeigneten Investitionsobjekte erfaßt und als Modellvariable im Modell berücksichtigt werden. Durch ein geeignetes Rechenverfahren der linearen Programmierung erfolgt dann unter Berücksichtigung der Finanzierungsmöglichkeiten die qualitative und quantitative Auswahl der Investitionsobjekte, die das optimale Investitionsprogramm darstellen.

2722 Finanzierungsprogramm

Jeder güterwirtschaftliche Vorgang stellt gleichzeitig einen Akt der Kapitaldisposition dar[2]; auf die Investitionsplanung übertragen bedeutet das, daß jede Investition einen Finanzierungsvorgang hervorruft.

---

[1] Vgl. LÖCKE, W.: Bemerkungen zum Investitionstypus und zum Problem der Zwischenanlage. In: Beiträge zur Unternehmensführung und Unternehmensforschung. Festschrift für W.F.RIESTER zum 7o. Geburtstag gewidmet von Fachkollegen, Schülern und Freunden. Hrsg. v. R. SCHWINN, Würzburg-Wien 1972, S. 165.

[2] Vgl. GUTENBERG, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Bd. 3, Die Finanzen, Berlin-Heidelberg-New York 1969, S. 2. Aus diesem Grunde kann unter dem Gesichtspunkt einer gesamtbetrieblichen Zielvorstellung eine isolierte Behandlung des güterwirtschaftlichen Bereichs nicht erfolgen, sondern die Einbeziehung der finanziellen Sphäre bleibt unerläßlich.

Eine Investitionsentscheidung wird nur dann realisierbar, wenn die erforderlichen Finanzierungsmittel zur Verfügung stehen, so daß eine Investitionsentscheidung nicht nur auf Vorteilhaftigkeit, sondern auch auf die Finanzierungsmöglichkeit zu prüfen ist.

Durch die Abhängigkeit der Durchführung einer Investition von den Finanzierungsgegebenheiten läßt sich in der Realität das Investitionsproblem vom Finanzierungsproblem nicht trennen[1].

Die Interdependenz zwischen der Investitions- und Finanzplanung versuchte man zunächst in den Investitionsrechnungen dadurch zu umgehen, daß ein vollkommener Kapitalmarkt[2] unterstellt wurde. Die Annahme eines vollkommenen Kapitalmarktes bedeutet die Möglichkeit der Kapitalaufnahme beliebiger Beträge zu einem festen einheitlichen Marktzinsfuß.

Durch diese Annahme schrumpft das "Finanzierungsprogramm" auf eine Finanzierungsart zusammen, deren Höhe lediglich bestimmt werden muß und somit die Aufstellung eines Finanzierungsprogramms überflüssig macht.
Eine derartige Betrachtungsweise entspricht jedoch nicht der wirtschaftlichen Realität, so daß sich eine Investitionstheorie, die Investitionsentscheidungen vorbereiten soll, von der Prämisse des vollkommenen Kapitalmarktes lösen muß[3,4].

---

1 Vgl. ALBACH, H.: Investition und Liquidität, a.a.O., S. 29.

2 Vgl. ALBACH, H.: Investition und Liquidität, a.a.O., S. 3o.

3 Vgl. HAX, H.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 43o.

4 Als Einschränkung dieser Aussage könnte die - in der Praxis selten anzutreffende - Möglichkeit der Finanzierung durch einen einzigen Bankkredit zu einem konstanten Zinssatz angesehen werden. Vgl. LUTZ, F.A. und V.: The Theory of Investment of the Firm, Princeton 1951, S. 1oo. Auch bei dieser Finanzierungsannahme wäre die Erfüllung des vollkommenen Kapitalmarktes - konstanter Zinssatz und unbeschränkter Kreditbetrag - bei längerfristiger Betrachtung fraglich.

Die Unternehmung sieht sich vielmehr einem Kapitalangebot[1] gegenüber, das durch unterschiedliche Konditionen[2] - vor allem in bezug auf Zins- und Tilgungsbedingungen sowie differierende Fristigkeiten[3] - gekennzeichnet ist.

Bei Aufstellung eines Finanzierungsprogramms wird das gesamte der Unternehmung zur Investitionsfinanzierung zur Verfügung stehende Kapitalangebot erfaßt.
Die einzelne Finanzierungsart geht als Finanzierungsvariable in das Modell ein und wird durch Ein- und Auszahlungsströme gekennzeichnet.
Ein Einzahlungsvorgang wird sofort bei der Inanspruchnahme der betreffenden Finanzierungsart hervorgerufen, während Auszahlungen durch Zins- und Tilgungszahlungen in den einzelnen Perioden der Laufzeit der Finanzierungsmaßnahme anfallen.

Aus den sich anbietenden Finanzierungsalternativen wird mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens in Abstimmung mit dem Investitionsprogramm das optimale Finanzierungsprogramm zusammengestellt, das somit aus den in Anspruch zu nehmenden Finanzierungsvariablen und deren Aktivitätsniveaus besteht[4].

---

1 Die Finanzierungsmöglichkeiten, die aus dem Kapitalangebot resultieren, sind nicht für jede Unternehmung gleich, sondern hängen zum einen von der Bonität des Kreditnehmers und zum anderen von der rechtlichen Form der Unternehmung ab. So können beispielsweise Aktiengesellschaften Finanzierungsmittel im Wege einer Kapitalerhöhung durch Ausgabe von Aktien erhalten, während Personengesellschaften auf diese externe Finanzmittelbeschaffung verzichten müssen.

2 Vgl.auch MODIGLIANI, F.; MILLER, M.H.: The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment. In: The American Economic Review, Vol. 48 (1958), S. 273.

3 Die Form eines Kapitalmarktes, der durch derartige Finanzierungsformen gekennzeichnet ist, wird als 'unvollkommener Kapitalmarkt' bezeichnet. Vgl. ALBACH, H.: Investition und Liquidität, a.a.O., S. 2o u. S. 31 f. D. SCHNEIDER spricht dann von einem unvollkommenen Kapitalmarkt, wenn Kapitalanlagezinssatz und Kapitalaufnahmezinssatz differieren.Vgl. SCHNEIDER, D.: Investition und Finanzierung, a.a.O., S. 298.

4 Durch die Fixierung des Finanzierungsprogramms wird gleichzeitig das Verhältnis von Eigenkapital- zu Fremdkapitalfinanzierung festgelegt, das die Kapitalstruktur der Investitionsfinanzierung ausdrückt.

Die Erstellung eines Finanzierungsprogramms kann sich nicht nur auf die Bereitstellung der erforderlichen Mittel zur Durchführung der Investitionen beschränken, sondern es muß darüber hinaus dafür gesorgt werden, daß "die Auswirkungen der augenblicklichen Entscheidung in der Zukunft mit den dann gegebenen Möglichkeiten so in Einklang gebracht werden können, daß keine Spannungen im finanziellen Gefüge"[1] entstehen, die durch Kapitaldienstleistungen in späteren Perioden hervorgerufen werden können.

Faßt man das optimale Investitions- und Finanzierungsprogramm zusammen, so findet das Ergebnis einer simultanen Investitions- und Finanzplanung seinen Ausdruck im Kapitalbudget des Betriebes, "in dem für einen bestimmten Planungszeitraum festgelegt ist, in welchem Umfang und in welcher Weise Kapital beschafft werden soll und welchen Verwendungszwecken dieses Kapital zuzuführen ist. Gesucht ist ein optimales Kapitalbudget, ein optimales Bündel von Investitionsprojekten und Finanzierungsmaßnahmen"[2], das in Hinblick auf die Zielfunktion optimal sein soll.

Bei Unterstellung erwerbswirtschaftlicher Zielvorstellungen[3] ist Optimalität des Finanzierungsprogramms dann gegeben, wenn einerseits durch die Wahl der Finan-

---

[1] ALBACH, H.: Investition und Finanzierung, a.a.O., S. 16.

[2] HAX, H.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 43o.

[3] Vgl. GUTENBERG, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Bd. 1. Die Produktion, a.a.O., S. 452 ff.

zierungsmaßnahmen eine ständige Erfüllung fälliger Zahlungsverpflichtungen gegeben ist und andererseits die Finanzierungskosten unter den gegebenen Investitionsbedingungen minimal gehalten werden[1].

28 Darstellung finanzwirtschaftlicher Investitionsmodelle der linearen Programmierung

281 Modell mit der Zielfunktion der Kapitalwertmaximierung

2811 Darstellung des Modells

Nach der Abbildung quantitativer wirtschaftlicher Sachverhalte in einem Rechenmodell erfolgt deren Lösung mit Hilfe mathematischer Lösungsmethoden durch die Bestimmung von Extremwerten einer Funktion unter gewissen Nebenbedingungen[2]. In Modellen der linearen Programmierung lassen sich die linearen Abhängigkeiten der Variablen in den Nebenbedingungen und der Zielfunktion ausdrücken. Die Transformation ökonomischer Sachverhalte in ein mathematisch formuliertes Modell unterliegt folgenden Voraussetzungen:

1. Das zu lösende ökonomische Problem muß in ein mathematisches Modell abzubilden sein, ohne daß dabei die wesentlichen wirtschaftlichen Aussagen und die wirtschaftlichen Zusammenhänge verfälscht werden[3].
2. Die Zielfunktion und die Beschränkungen müssen durch mathematische Funktionen darstellbar sein.

---

[1] Vgl. auch NIEMEYER, G.: Investitionsentscheidungen mit Hilfe der elektronischen Datenverarbeitung. Berlin 1970, S. 115. Ähnlich auch MÜLHAUPT, der eine Unternehmung dann als optimal finanziert ansieht, "wenn sie eine finanzielle Struktur besitzt, die es ihr gestattet, ihre Zielsetzung ohne Gefährdung ihrer Sicherheit zu minimalen Finanzierungskosten zu verwirklichen" /MÜLHAUPT, L.: Der Bindungsgedanke in der Finanzierungslehre unter besonderer Berücksichtigung der holländischen Finanzierungsliteratur. Wiesbaden 1966, S. 12/.

[2] Vgl. ANGERMANN, A.: Linear Programming. In: Handwörterbuch der Sozialwissenschaften, Bd. VI, Stuttgart-Tübingen-Göttingen 1959, S. 611.

[3] Vgl. BECKMANN, M.J.: Lineare Planungsrechnung. Würzburg 1959, S. 3.

3. Die Zielfunktion muß entweder maximiert oder minimiert werden bzw. einen festen Wert anstreben.

Eine Formulierung linearer finanzwirtschaftlicher Investitionsmodelle und die Lösung mit Hilfe mathematischer Verfahren der Unternehmensforschung setzt die Abbildung investitionstheoretischer und finanzieller Zusammenhänge in linearen Funktionen voraus.

Die Auffassung über die Existenz linearer Beziehungen innerhalb beider Planungsbereiche wird in der Literatur nicht immer einheitlich vertreten. Von vielen Autoren wird eine Abbildung des wirtschaftlichen Sachverhaltes durch lineare Beziehungen als korrekt angesehen[1]; andere Autoren lehnen die Prämisse einer Linearität zwischen den Variablen ab[2].

Doch nicht die Frage, ob lineare oder nichtlineare Zusammenhänge der Variablen bestehen, muß als das entscheidende Problem angesehen werden, da die Rechenverfahren der Unternehmensforschung auch gewisse nichtlineare Programme einer Lösung zuführen; eine weitaus größere Schwierigkeit bereitet die Transformation von wirtschaftlichen Sachverhalten in quantitative Modellgrößen[3], wenn eine zahlenmäßige Erfassung des wirtschaftlichen Vorgangs nur schwer möglich ist.

---

[1] Vgl. z.B. die Modelle von ALBACH, H. HAX und WEINGARTNER.

[2] Vgl. SWOBODA, P.: Die Ermittlung optimaler Investitionsentscheidungen durch Methoden des Operations Research. Eine Stellungnahme zum Aufsatz von H. ALBACH: "Rentabilität und Sicherheit als Kriterien betrieblicher Investitionsentscheidungen". In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 31 (1961), S. 1o3. Die Unterstellung linearer Beziehungen wird nach SWOBODA der Komplexität des Entscheidungsproblems nicht gerecht. In diesen Fällen wird die Anwendung der dynamischen Programmierung vorgezogen, die das Gesamtproblem schrittweise aufgliedert. Zur dynamischen Programmierung vgl. u.a. BELLMANN, R.: Dynamic Programming, Princeton 1957. NEMHAUSER, G.L.: Einführung in die Praxis der dynamischen Programmierung, München-Wien 1969.

[3] Vgl. SWOBODA, P.: Die Ermittlung optimaler Investitionsentscheidungen durch Methoden des Operations Research, a.a.O., S. 1o3.

Die ungenaue Abbildung der ökonomischen Tatbestände kann bei der Entscheidungsfindung leicht zu Fehlerquellen führen.

Die finanzwirtschaftlichen Investitionsmodelle[1] lassen sich in zwei große Gruppen aufteilen, die sich im wesentlichen in der Form der Zielfunktion unterscheiden:

1. finanzwirtschaftliche Investitionsmodelle mit der Zielfunktion der Kapitalwertmaximierung
2. finanzwirtschaftliche Investitionsmodelle mit der Zielfunktion der Vermögensendwertmaximierung

Bei der Kapitalwertmaximierung wird für jede Variable ein Kapitalwert errechnet.

Den Kapitalwert[2] einer Zahlungsreihe erhält man, indem die Zahlungen der einzelnen Perioden auf einen Bezugszeitpunkt[3] mit einem Kalkulationszinsfuß[4] abgezinst

---

1 Unter finanzwirtschaftlichen Investitionsmodellen werden im folgenden die Investitionsmodelle verstanden, die Investitionsprogramme und finanzielle Maßnahmen simultan planen und damit die Interdependenzen von Investition und Finanzierung berücksichtigen.

2 Zur Definition des Kapitalwertes vgl. u.a.: HAX, H.: Investitionstheorie, Würzburg-Wien 197o, S. 1o. SCHNEIDER, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung. Theorie der Investition, a.a.O., S. 15 ff. ALBACH, H.: Wirtschaftlichkeitsrechnung bei unsicheren Erwartungen. Köln und Opladen 1959, S. 44 ff. SCHINDLER, H.: Investitionsrechnung in Theorie und Praxis, a.a.O., S. 49 ff.

3 Als Bezugszeitpunkt wird in der Regel der Beginn des Planungszeitraumes gewählt.

4 Auf die Problematik der Fixierung des Kapitalwertes und den darin eingehenden Kalkulationszinsfuß wird in Kapitel 2812 und 2813 eingegangen.

und addiert werden[1].

Jede Variable wird daher durch einen Bar- bzw. Kapitalwert charakterisiert, der als Erfolgssatz der betrachteten Variablen anzusehen ist. Die Summe der Kapitalwerte wird maximiert, was dem Prinzip der Gewinnmaximierung entspricht.

Die entscheidenden investitionstheoretischen Modellansätze, die auf der Maximierung des Kapitalwertes beruhen, wurden von ALBACH[2] entwickelt. Diesem Modell soll der von LORIE/SAVAGE[3] beschriebene Ansatz, der als eine vereinfachte Form des ALBACH-Modells angesehen werden kann, vorangestellt werden.

Das Modell von LORIE/SAVAGE erfaßt als Variablen lediglich die zur Auswahl stehenden Investitionsalternativen x_j ($j = 1, \ldots, \bar{j}$), für die aufgrund der Einzahlungs- und Auszahlungsströme während der einzelnen Perioden t ($t = 1, \ldots, T$) des Planungszeitraumes $\bar{T}$ sowie eines fest vorgegebenen Kalkulationszinsfußes p Kapitalwerte berechnet werden, deren Summe in der Zielfunktion zu maximieren ist.

---

1 In Ergänzung zu den hier aufgeführten Gedanken zur Darstellung der Kapitalwertmodelle vgl. auch LOCKE, W.: Die Liquidität im Entscheidungsmodell. In: Gegenwartsfragen der Unternehmensführung. Festschrift zum 65. Geburtstag von W. HASENACK. Hrsg. v. H.J. ENGELEITER, Herne-Berlin 1966, S. 323 ff.

2 ALBACH entwickelte zwei Modelltypen, das statische und das dynamische Modell. Das statische Modell, das ein starres Investitionsprogramm erstellt, berücksichtigt nur Modellvariable, die schon zu Beginn des Planungszeitraums existieren. Durch diese realitätsfremde Prämisse soll auf die Darstellung des Modells verzichtet werden. Vgl. ALBACH, H.: Investition und Liquidität, a.a.O., S. 305 ff..

3 Vgl. LORIE, J.H., SAVAGE, L.J.: Three Problems in Rationing Capital, a.a.O., S. 229-239.

Die Restriktionen zur Aufrechterhaltung des finanziellen Gleichgewichts bewirken, daß die Auszahlungsüberschüsse der Investitionsobjekte in den einzelnen Perioden die zur Verfügung stehenden Finanzierungsmittel F_t $(t = 1,\ldots,T)$ nicht überschreiten.

Als weitere Restriktion wird eine spezielle Ganzzahligkeitsbedingung aufgestellt, die besagt, daß die Investitionsvariablen entweder den Wert 0 oder 1 annehmen können ($x_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$), d.h. daß ein Investitionsobjekt j höchstens einmal investierbar ist.

Modellformulierung

(28111)

$$Z = \max \left\{ \sum_{j=1}^{\bar{j}} c_j \cdot x_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\bar{j}} a_{tj} \cdot x_j \leq F_t,\ (t = 1,\ldots,T);\right\}$$

$$x_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad j = 1,\ldots,\bar{j}$$

In ausführlicher Schreibweise

Zielfunktion

(28112)

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} c_j \cdot x_j = \max!$$

c_j = Kapitalwert des Investitionsobjektes j

a_{tj} = Ausgabenüberschuß des Investitionsobjektes j in der Periode t

$$c_j = -\sum_{t=1}^{T} a_{tj} \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-t}$$

Finanzielle Restriktion

(28113)

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} a_{tj} \cdot x_j \leqq F_t; \qquad \forall t = 1,\ldots,T$$

F_t = Finanzierungsbetrag, der in der Periode t zur Verfügung steht

Ganzzahligkeits- und Nichtnegativitätsbedingung

(28114)

$$x_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} ; \qquad \forall j = 1,\ldots,\bar{j}$$

Durch die Lösung dieses Programms mit Hilfe der Simplexmethode[1] erhält man eine optimale Auswahl der möglichen Investitionsalternativen, wobei die jeweils in der Periode t zur Verfügung stehenden Finanzierungsbeträge auf die ausgewählten Investitionsobjekte nach dem Kriterium der Kapitalwerte optimal aufgeteilt werden.

Diese "rudimentäre"[2] Form, die sich lediglich auf die Aufstellung eines Investitionsprogramms beschränkt, in dem die im Laufe späterer Perioden des Planungszeitraumes auftretenden Investitionsmöglichkeiten

---

[1] Das Rechenverfahren der Simplexmethode ist in fast jedem Lehrbuch über Operations Research beschrieben. Aus der kaum noch zu übersehenden Vielfalt an Literatur sei hier nur genannt DANTZIG, G.B.: Lineare Programmierung und Erweiterungen, Berlin-Heidelberg-New York 1966, S. 11o ff. HENN, R., KÜNZI, H.P.: Einführung in die Unternehmensforschung II, Berlin-Heidelberg-New York 1968, S. 8 ff. MÜLLER-MERBACH, H.: Operations Research. Methoden und Modelle der Optimalplanung, a.a.O., S. 91 ff.

[2] SCHWEIM, J.: Integrierte Unternehmensplanung, a.a.O., S. 32.

nicht in dem Entscheidungsprozeß berücksichtigt werden. kann für eine weitere Betrachtungsweise nicht in Frage kommen[1].

Die Vernachlässigung der Aufnahmemöglichkeiten zusätzlicher finanzieller Mittel zu einem entsprechenden Erfolgssatz beschränkt eine anspruchsvolle Aussagefähigkeit des Modells.

Eine wesentliche Erweiterung bedeutet der dynamische Modellansatz von ALBACH[2], der ein Investitions- und Finanzierungsprogramm zusammenstellt, das folgenden Forderungen genügen soll:

"1. Das optimale Investitionsbudget muß aus einer simultanen Entscheidung über Investitions- und Finanzierungsmöglichkeiten hervorgehen.

---

[1] Eine wesentliche Modifizierung haben CHARNES/COOPER/MILLER vorgenommen. Vgl. CHARNES, A. u.a.: Application of Linear Programming to Financial Budgeting and the Costing of Funds. In: Journal of Business, Vol. 32 (1959), S. 2o-46. Ursprünglich wurde das Modell für ein Lagerhausproblem formuliert, das die optimalen Einkaufs- und Verkaufsmengen eines Produkts bei sich im Zeitablauf ändernden Preisen berechnet.
Zu maximieren ist der Gewinn unter den Restriktionen einer begrenzten Lagerkapazität und einem fest fixierten Betrag an Eigenmitteln.
Dieses Modell läßt sich in ein simultanes Investitions-Finanzierungsmodell transformieren, wobei man den Einkauf der Produkte als Investitionsvorgang und den Verkauf der Produkte nach gewisser Lagerzeit als Verkauf eines Fertigerzeugnisses ansehen kann. Vgl. SCHWEIM, J.: Integrierte Unternehmensplanung, a.a.O., S. 34.

[2] Vgl. ALBACH, H.: Investition und Liquidität, a.a.O., S. 22o ff. u. S. 316 ff.

2. Die Entscheidung muß dem erwerbswirtschaftlichen Prinzip Rechnung tragen.

3. Die Entscheidung muß die Aufrechterhaltung des finanziellen Gleichgewichts in jedem Augenblick gewährleisten.

4. Die Entscheidung muß auch den anderen Bedingungen, unter denen sich der betriebliche Kombinationsprozeß vollzieht, gerecht werden. Sie muß also dem Gesetz der Vollständigkeit der Planung und dem Ausgleichsgesetz der Planung genügen"[1].

Hinzu kommt, daß Investitions- und Finanzierungsmöglichkeiten nicht nur zu Beginn des Planungszeitraumes, sondern auch in späteren Perioden bestehen und in dem Modell erfaßt werden müssen.

Diese Forderungen bedingen, daß ein Investitionsprogramm zusammengestellt wird, welches aus den zur Verfügung stehenden Investitions- und Finanzierungsaktivitäten diejenigen auswählt, die unter Aufrechterhaltung des finanziellen Gleichgewichts in jeder Periode den größtmöglichen Kapitalwert erzielen.

---

[1] ALBACH, H.: Investition und Liquidität, a.a.O., S. 6o f.
Das Modell läßt sich auch lösen, wenn von dem erwerbswirtschaftlichen Prinzip abgegangen und als Zielfunktion z.B. ein angemessener in Geldgrößen fixierter Gewinn angestrebt wird.
Zum Ausgleichswert der Planung vgl. GUTENBERG, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Bd. 1: Die Produktion, a.a.O., S. 162 ff.

Für die einzelnen Variablen werden daher Kapitalwerte berechnet, deren Summe ein Maximum erreichen soll. Der Kapitalwert einer Modellvariablen j[1] ergibt sich aus ihren aufsummierten - mit einem Kalkulationszinsfuß auf den Bezugszeitpunkt - diskontierten Zahlungen der entsprechenden Perioden.

Die Kapitalwerte c_j der Investitionsvariablen setzen sich aus der Summe ihrer diskontierten Einzahlungsüberschüsse der einzelnen Planungsperioden t zusammen.

$$c_j = \sum_{t=1}^{T} d_{tj} \left(1 + \frac{P}{100}\right)^{-t}$$

d_{tj} = Einzahlungsüberschuß des Investitionsobjektes j in der Periode t

Unterstellt man einen konstanten Kalkulationszinsfuß p, so wächst der Kapitalwert c_j eines Investitionsobjektes j mit der Höhe der Einzahlungsüberschüsse d_{tj}. Durch die Diskontierung erhalten dabei Zahlungen einer früheren Periode mehr Gewicht als die einer späteren Periode.

Bei einem negativen Kapitalwert ist die Summe der diskontierten Zahlungsströme kleiner als Null, so daß das Investitionsobjekt einen negativen Beitrag zur Zielerfüllung liefert.

Für die Finanzierungsvariablen f lassen sich die Kapitalwerte e_f entsprechend ermitteln

---

[1] Durch den Index j sei jedes Investitionsobjekt hinsichtlich der Investitionsart sowie dem Zeitpunkt der Inanspruchnahme eindeutig bestimmt; das entsprechende gilt für den Index f der Finanzierungsvariablen.
Diese Hinweise werden bei ALBACH sowie bei anderen Darstellungen des ALBACH-Modells vermißt. Eine Andeutung findet man lediglich bei SCHWEIM, J.: Integrierte Unternehmensplanung, a.a.O., S. 4o. Die Einführung eines weiteren Index für den Zeitpunkt der Inanspruchnahme einer Modellvariablen erweist sich als recht nützlich, wie in Kapitel 3 gezeigt wird.

$$e_f = - \sum_{t=1}^{T} g_{tf} \left(1 + \frac{P}{100}\right)^{-t}$$

g_{tf} = Auszahlungsüberschuß der Finanzierungsmaßnahme f in der Periode t

Die Kapitalwerte e_f der Finanzierungsvariablen weisen im allgemeinen negative Werte auf, da durch die Verzinsung des Finanzierungsbetrages die Auszahlungen die Höhe der Einzahlungen übertreffen werden. Je größer der Auszahlungsüberschuß, um so kleiner wird der Kapitalwert, wobei die zeitliche Verteilung der Zahlungen auch mitbestimmend wirkt.

Um einen positiven Zielwert zu erhalten, müssen die diskontierten Einzahlungsüberschüsse der Investitionsobjekte die diskontierten Auszahlungsüberschüsse der Finanzierungsmaßnahmen, die sich in der Zielfunktion negativ niederschlagen, überkompensieren.

Modellformulierung:

Zielfunktion

(28115)

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} c_j \cdot x_j + \sum_{f=1}^{\bar{f}} e_f \cdot y_f = \max!$$

Nebenbedingungen

Liquiditätsbedingung

Die Liquiditätsbedingung gewährleistet die jederzeitige Zahlungsfähigkeit der Unternehmung hinsichtlich der vorgenommenen Investitionen.

(28116)

$$-\sum_{j=1}^{\bar{j}} d_{tj} \cdot x_j + \sum_{f=1}^{\bar{f}} g_{tf} \cdot y_f \leq B_{Et}; \qquad \forall t = 1,\ldots,T$$

B_{Et} = Bestand an eigenen Mitteln zu Beginn der Periode t

Bei Unterstellung eines beschränkten Kapitalmarktes müssen weiterhin Obergrenzen für die Finanzierungsmöglichkeiten (Y_f) und die Anzahl der Investitionsobjekte (X_j) angegeben werden, da ein Betrieb keinen unbegrenzten Finanzierungsspielraum aufweist und die ökonomisch sinnvolle Installation von Investitionsobjekten ebenfalls - z.B. durch Absatzbeschränkungen - begrenzt ist.

Finanzierungsrestriktion

(28117)

$$y_f \leq Y_f \qquad \forall f = 1,\ldots,\bar{f}$$

Investitionsrestriktion

(28118)

$$x_j \leq X_j \qquad \forall j = 1,\ldots,\bar{j}$$

Berücksichtigt man die Absatzmöglichkeit der Produkte v und die Leistung der zu investierenden Aggregate, so darf die Produktion der Produktart v auf der Maschine j die Absatzhöchstmenge M_{vt} der Produktart v in der Periode t nicht überschreiten[1].

[1] Diese Vorschrift schließt eine Lagerhaltung für die Produkte v aus.

Absatzrestriktion

(28119)

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} h_{jvt} \cdot x_j \leq M_{vt}; \qquad \begin{matrix} \forall v = 1,\ldots,\bar{v} \\ \forall t = 1,\ldots,T \end{matrix}$$

h_{jvt} = Maximale Anzahl der Produktart v, die in der Periode t von der Maschine j produziert werden kann.

M_{vt} = Absatzhöchstmenge der Produktart v in der Periode t.

Nichtnegativitätsbedingung

(2812o)

$$x_j,\ y_f \geq 0; \qquad \begin{matrix} \forall j = 1,\ldots,\bar{j} \\ \forall f = 1,\ldots,\bar{f} \end{matrix}$$

Die Nichtnegativitätsbedingung formalisiert die ökonomische Notwendigkeit nichtnegativer Investitions- und Finanzierungsvariablen.

Damit ist das dynamische Modell von ALBACH vollständig beschrieben.

2812 Diskussion des Modells der Kapitalwertmaximierung

Die Kritik an den Modellen der Kapitalwertmaximierung entzündet sich vor allem an der Fixierung des Kalkulationszinsfußes, der notwendig ist, um Kapitalwerte berechnen zu können.

Nach ALBACH soll der Kalkulationszinsfuß die "durchschnittliche Rentabilität des Unternehmens"[1] ausdrücken und die "langfristig gewünschte Mindestverzinsung der Investitionsobjekte"[2] dokumentieren. Voraussetzung dazu ist die von ALBACH getroffene Annahme, daß "alle freiwerdenden Mittel zum Kalkulationszinsfuß angelegt werden können"[3].

In diesem Punkt ist der Kritik von HAX[4] zuzustimmen, der die Wiederanlage von freigewordenen Mitteln zu einer in der Vergangenheit erzielten Rentabilität als fragwürdig ansieht.

Vielmehr muß davon ausgegangen werden, daß ein fester einheitlicher Zins für die Finanzinvestitionen nicht zu ermitteln ist und sich ein fest fixierter Anlagezinssatz schon allein durch die Änderung der Kapitalmarktverhältnisse laufend verschiebt und bei einer langfristigen Planung somit für die Entscheidungsvorbereitung ungeeignet bleibt.

---

1 ALBACH, H.: Investition und Liquidität, a.a.O., S. 86.

2 ALBACH, H.: Investition und Liquidität, a.a.O., S. 86.

3 ALBACH, H.: Investition und Liquidität, a.a.O., S. 86.

4 Vgl. HAX, H.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 434. Vgl. auch MOXTER, A.: Lineares Programmieren und betriebswirtschaftliche Kapitaltheorie. In: Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, Jg. 15 (1963), S. 285-3o9, bes. S. 296 ff. BLUMENTRATH, U.: Investitions- und Finanzplanung mit dem Ziel der Endwertmaximierung, a.a.O., S. 27o ff.

2813 Ausführungen zum Kalkulationszinsfuß in linearen Investitionsmodellen

Die Ableitung von Kalkulationszinsfüßen aus linearen finanzwirtschaftlichen Investitionsmodellen sowie die Verwendung von Kapitalwerten ist an die grundsätzliche Prämisse gebunden, daß jedem Investitionsobjekt bzw. jeder Finanzierungsmaßnahme Zahlungsströme zuzuordnen sind. Für Finanzierungsaktionen stellt diese Prämisse keine einschneidende Voraussetzung dar, da sich die Zahlungsströme aus der Zurverfügungstellung des Finanzierungsbetrages und aus den Zins- und Tilgungskonditionen, die bei der Gewährung bzw. Anlage der Mittel als bekannt unterstellt werden können, ergeben.

Eine Zurechnung von Zahlungsströmen zu Investitionsobjekten stößt dagegen auf weit größere Schwierigkeiten. Die Auszahlungsströme in Form der Anschaffungsausgabe und eventueller Reparatur- und Instandhaltungsausgaben können durch Prognoseverfahren annähernd ermittelt werden. Die Einzahlungsströme dagegen, die zum großen Teil aus den Umsätzen der Produkte resultieren, unterliegen einer geschlüsselten Zuordnung auf die die Produkte erzeugenden Investitionsobjekte, wobei diese Zuordnung in den meisten Fällen problematisch ist.

Diese Schwierigkeit wird besonders dann bedeutend, wenn es sich um mehrstufige Produktionsprozesse handelt, bei denen das Produkt mehrere Aggregate zu durchlaufen hat. Da die finanzwirtschaftlichen Investitionsmodelle den Produktionsbereich nicht einer genaueren Analyse unterziehen, wird ein Grad an Ungenauigkeit bei der Zuordnung der Zahlungsströme in Kauf genommen.

Bei der Unterstellung eines vollkommenen Kapitalmarktes, bei dem lediglich die Zusammensetzung eines optimalen Investitionsprogramms zu fixieren ist, tritt die Frage nach dem anzusetzenden Kalkulationszinsfuß in den Hintergrund, da nur ein Marktzinsfuß existiert, zu dem beliebig große Finanzierungsbeträge aufgenommen und ausgeliehen werden können.

Aus dieser Annahme folgt, "daß sich zwei /Investitions-/ Projekte nicht aus finanziellen, sondern nur aus technischen oder sonstigen Gründen gegenseitig ausschließen können"[1].

Bei einem unvollkommenen, beschränkten Kapitalmarkt soll sich der Kalkulationszinsfuß an den Anlagemöglichkeiten des Kapitals orientieren[2].

Eine exakte Ermittlung des Kalkulationszinsfußes wird auch hier schwerfallen, da die Bestimmung eines Anlagezinsfußes als kaum realistisch angesehen werden kann.

Durch die Optimalbedingung[3] linearer Investitions- und Finanzierungsmodelle fällt mit der Bestimmung des optimalen Kapitalbudgets gleichzeitig die Höhe des Kalkulationszinsfußes[4] an. Da der Kalkulationszinsfuß in diesem Fall erst durch die Lösung des Problems ermittelt wird, muß seine Verwendung als Bestimmungsfaktor der Kapitaldisposition jedoch als fraglich angesehen werden.

---

1 HAX, H., LAUX, H.: Investitionstheorie. In: Beiträge zur Unternehmensforschung. Gegenwärtiger Stand und Entwicklungstendenzen. Hrsg. v. G. MENGES. Würzburg-Wien 1969, S. 228.

2 So sieht MOXTER den Kalkulationszinsfuß als Mindestrendite bzw. Mindestverzinsung an, die sich bei einer Anlage ergeben muß. Vgl. MOXTER, A.: Die Bestimmung des Kalkulationszinsfußes bei Investitionsentscheidungen. Ein Versuch zur Koordination von Investitions- und Finanzierungslehre. In: Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, N.F., Jg. 13 (1961), S. 188.

3 Vgl. Kapitel 2814.

4 Vgl. Kapitel 2814.

Unter diesem Gesichtspunkt kann auch D. SCHNEIDER zugestimmt werden, der den Gebrauch des Kalkulationszinsfußes nicht als notwendig erachtet, eine Verwendung jedoch aus Vereinfachungsgründen in die Modellbetrachtung mit einbezieht, wobei sich die Höhe des Kalkulationszinsfußes nach den Vereinfachungen des Modells richtet[1].

Im Gegensatz zu den herkömmlichen Investitionsmodellen berücksichtigt ein optimales simultan bestimmtes mehrperiodiges Investitions- und Finanzierungsprogramm nicht nur rentabilitätsmäßige,sondern auch liquiditätspolitische Aspekte, so daß eine separate Behandlung der Investitionen und der entsprechenden Finanzierungen und somit die Fixierung einer Rangfolge der Projekte nach der Höhe der Kapitalwerte nicht mehr erfolgen kann.

So könnten z.B. zinsgünstige Kredite nicht voll ausgeschöpft werden, da die dazugehörigen Tilgungsbedingungen das finanzielle Gleichgewicht der Unternehmung gefährden, so daß auf weniger günstige Finanzierungsquellen zurückgegriffen werden muß.

Es zeigt sich, daß eine isolierte Betrachtungsweise nicht immer zu einem betrieblichen Optimum führt, sondern daß jeweils simultan bestimmte Investitions- und Finanzierungsprogramme verglichen werden müssen.

---

[1] Vgl. SCHNEIDER, D.: Investition und Finanzierung, a.a.O., S. 241.

Bei der Bestimmung von Investitionsprogrammen sind jedoch Fälle denkbar, in denen die Berechnung von Preisober- und -untergrenzen für die Modellvariablen sinnvoll ist, um einer vorgegebenen Zielsetzung zu entsprechen.

Diese Preisober- und Preisuntergrenzen können durch den Kalkulationszinsfuß im Investitionsmodell aufgezeigt werden[1].

2814 Bestimmung des Kalkulationszinsfußes aus einem linearen Investitionsmodell mit Hilfe des KUHN-TUCKER-Theorems

Zur Ableitung der Kalkulationszinsfüße aus einem Investitionsmodell unter Ausnutzung wichtiger Theoreme der mathematischen Programmierung und zur Gewinnung ökonomischer Aussagen soll aus Darstellungsgründen

---

[1] Vgl. Kapitel 2814.

von einem vereinfachten Investitionsmodell ausgegangen werden[1].

Dabei werden nur solche Investitionsobjekte betrachtet, die sich zum Zeitpunkt der Planaufstellung anbieten und nur zu Beginn der ersten Periode investiert werden können. Die mit diesen Objekten verbundenen Transaktionen müssen am Ende des Planungszeitraums abgeschlossen sein.
Das optimale Investitionsprogramm setzt sich dann aus der Anzahl x_j der ausgewählten Investitionsobjekte j zusammen.

---

[1] Vgl. auch KEIFER, R.: Der Kalkulationszinsfuß und investitionstheoretische Entscheidungsmodelle. Diss. Mannheim 197o, S. 122 ff. Die Ableitung der Kalkulationszinsfüße aus Modellen mit der Zielfunktion der Vermögensendwertmaximierung, die zu ähnlichen Ergebnissen führt, findet man bei: HAX, H.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 43o-446, bes. S. 439 ff. HAX, H.: Investitionstheorie, a.a.O., S. 76 ff. FRANKE, G., LAUX, H.: Die Ermittlung der Kalkulationszinsfüße für investitionstheoretische Partialmodelle. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung. N.F., Jg. 2o (1968), S. 74o-759, bes. S. 743 ff. SCHWEIM, J.: Integrierte Unternehmensplanung, a.a.O., bes. S. 6o ff. BLUMENTRATH, U.: Investitions- und Finanzplanung mit dem Ziel der Endwertmaximierung, a.a.O., bes. S. 82 ff. u. S. 9o ff. BAUMOL, W.J., QUANDT, R.E.: Investment and Discount Rates under Capital Rationing. A Programming Approach. In: The Economic Journal, Vol. 75 (1965), S. 317-329. WEINGARTNER, H.M.: Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems, a.a.O., S. 143 ff. HABERSTOCK, L.: Zur Integrierung der Ertragsbesteuerung in die simultane Produktions-, Investitions- und Finanzierungsplanung mit Hilfe der Linearen Programmierung, a.a.O., S. 66 ff.

Der Erfolgskoeffizient c_j der Investitionsvariablen j, der dem Kapitalwert gleichkommt, resultiert aus den Erfolgsbeiträgen der einzelnen Perioden t = 1,...,T. Die Finanzierungsmöglichkeiten sind durch die jeweils in der Periode t (t = 1,...,T) zur Verfügung stehenden eigenen Mittel b_t (t = 1,...,T) beschränkt. Sei d_{tj} die Kapitalinanspruchnahme des Investitionsobjektes j in der Periode t, so ergibt sich bei Unterstellung einer Zielfunktion, die Gewinnmaximierung anstrebt, folgendes lineare Modell:

(28141)

$$Z = \sum_{j=1}^{\bar{j}} c_j \cdot x_j = \max!$$

(28142)

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} d_{tj} \cdot x_j \leq b_t; \qquad \forall t = 1,\ldots,T$$

$$x_j \geq 0 \qquad \forall j = 1,\ldots,\bar{j}$$

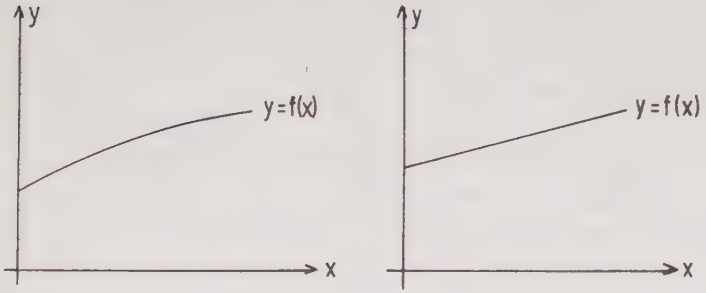
Zur Berechnung des Optimums der Zielfunktion (28141) unter Berücksichtigung der Restriktionen (28142) und der Nichtnegativitätsbedingung können die KUHN-TUCKER-Bedingungen herangezogen werden.
Voraussetzung für die Anwendung der KUHN-TUCKER-Bedingungen zur Bestimmung des Optimums einer Funktion sind die Konkavität[1] der zu maximierenden Zielfunktion sowie die

[1] Eine Funktion y = f(x) heißt konkav über einem bestimmten Intervall J ihres Definitionsbereiches, wenn für beliebige Werte x_1, $x_2 \in J$ und für alle u ($o \leq u \leq 1$) gilt: $f(u \cdot x_2 + (1-u)x_1) \geq u \cdot f(x_2) + (1-u) f(x_1)$.
Streng konkav heißt eine Funktion dann, wenn nur das > Zeichen Gültigkeit besitzt. Vgl. Lehrbuch der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften. Hrsg. v. H. KÖRTH u.a. Opladen 1972, bes. S. 418 f und S. 648. KÜNZI, H.P., KRELLE, W.: Nichtlineare Programmierung, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962, S. 36.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit der bedingten Zielfunktion, die sich aus der Zielfunktion des Problems und den Restriktionen zusammensetzt.

KUHN und TUCKER[1] haben allgemeine Optimalkriterien für das Auffinden von Extremalwerten bei Vorhandensein einer konkaven Zielfunktion und Restriktionen in Form von Ungleichungen abgeleitet.

Eine konkave Funktion läßt sich geometrisch folgendermaßen veranschaulichen:



streng konkave Funktion

sowohl konkave als auch konvexe Funktion (lineare Funktion)

Abb.3

[1] Vgl. KUHN, H.W., TUCKER, A.W.: Non-linear programming. In: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Hrsg. v. J. NEYMAN. Berkeley/Cal. 1951, S. 481-492. KÖNZI, H.P., KRELLE, W.: Nichtlineare Programmierung, a.a.O., S. 59 ff. BOHR, K.: Zur Produktionstheorie der Mehrproduktunternehmung, Köln-Opladen 1967, bes. S. 7o ff. HADLEY, G.: Nichtlineare und dynamische Programmierung. (Deutsch Hrsg. v. H.P. KÖNZI), Würzburg-Wien 1969, bes. S. 229 ff. BUHR, W.: Dualvariable als Kriterium unternehmerischer Planung. Die Bedeutung der Dualitätsbeziehungen des mathematischen Programmierens für die entscheidungsbezogene Theorie der Unternehmung, Meisenheim/Glan 1967, bes. S. 36 ff. HENN, R., KÖNZI, H.P.: Einführung in die Unternehmensforschung II, a.a.O., S. 43 ff.
Zur Verwendung des KUHN-TUCKER-Theorems bei der Quotientenmaximierung für das Problem der Rentabilitätsmaximierung vgl. BLOECH, J.: Zum Problem der Rentabilitätsmaximierung. In: Beiträge zur Unternehmensführung und Unternehmensforschung. Festschrift für W.F. RIESTER zum 7o. Geburtstag gewidmet von Fachkollegen, Schülern und Freunden. Hrsg. v. R. SCHWINN. Würzburg-Wien 1972, S. 185-21o, bes. S. 19o ff.

Da die Zielfunktion des Problems konstante Koeffizienten c_j unterstellt und die Variablen linear sind, hat die Zielfunktion die Form einer linearen Funktion.
Eine lineare Funktion ist zwar nicht streng konkav, jedoch sowohl konkav

$$\left[\text{es gilt: } f\left(u \cdot x_2 + (1-u)x_1\right) = u \cdot f(x_2) + (1-u) f(x_1)\right]$$

als auch konvex.

Die Stetigkeit der Funktion wird bei Unterstellung kontinuierlicher Variablen gewährleistet, so daß die KUHN-TUCKER-Bedingungen zur Ableitung eines Optimums Anwendung finden können.

Zur Ableitung der Optimalkriterien wird unter Einführung der LAGRANGEschen Multiplikatoren λ_t[1] eine LAGRANGEsche Funktion gebildet, welche die Investitionsvariablen und LAGRANGEsche Multiplikatoren λ_t $(t = 1,\ldots,T)$ enthält:

(28143)

$$Z\ (x_1,\ldots,x_j;\ \lambda_1,\ldots,\lambda_T) =$$

$$\sum_{j=1}^{j} c_j \cdot x_j - \sum_{t=1}^{T} \lambda_t \left(\sum_{j=1}^{j} d_{tj} \cdot x_j - b_t \right)$$

Um das optimale Investitionsprogramm zu erhalten, wird diese Funktion maximiert.

---

[1] Vgl. KÜNZI, H.P., KRELLE, W.: Nichtlineare Programmierung, a.a.O., S. 6o.

(28143a)

$$Z(x_1,\ldots,x_{\bar{j}};\ \lambda_1,\ldots,\lambda_T) =$$

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} c_j \cdot x_j - \sum_{t=1}^{T} \lambda_t \left(\sum_{j=1}^{\bar{j}} d_{tj} \cdot x_j - b_t \right) = \max!$$

Im Extremum der Funktion erfüllen die partiellen ersten Ableitungen der Funktion nach den Variablen x_j und λ_t bestimmte Relationen, aus denen sich die Bedingungen für die optimalen Lösungsvektoren $X^{o\prime} = (x_1^o,\ldots,x_{\bar{j}}^o)$ und $\lambda^{o\prime} = (\lambda_1^o,\ldots,\lambda_T^o)$ ergeben:

(28144)

$$\frac{\partial Z(X^o,\lambda^o)}{\partial x_j} = c_j - \sum_{t=1}^{T} \lambda_t^o \cdot d_{tj} \leqq 0 \qquad \forall j = 1,\ldots,\bar{j}$$

(28145)

$$x_j^o \cdot \frac{\partial Z(X^o,\lambda^o)}{\partial x_j} = x_j^o \left(c_j - \sum_{t=1}^{T} \lambda_t^o \cdot d_{tj}\right) = 0 \qquad \forall j = 1,\ldots,\bar{j}$$

(28146)

$$x_j^o \geqq 0 \qquad \forall_j = 1,\ldots,\bar{j}$$

(28147)

$$\frac{\partial Z(X^o,\lambda^o)}{\partial \lambda_t} = \sum_{j=1}^{\bar{j}} d_{tj} \cdot x_j^o - b_t \leqq 0^1 \qquad \forall t = 1,\ldots,T$$

---

[1] Das 'kleiner gleich' Zeichen resultiert aus dem negativen Vorzeichen der LAGRANGEschen Multiplikatoren in Gleichung 28143. Die Wahl des Vorzeichens ist beliebig, da der nachfolgende Ausdruck Null ergibt. Bei der Wahl eines positiven Vorzeichens der LAGRANGEschen Multiplikatoren würde der Ausdruck (28147) ein 'größer gleich' Zeichen erhalten.

(28148)

$$\lambda_t^o \frac{\partial Z(x^o,\lambda^o)}{\partial \lambda_t} = \lambda_t^o \left(\sum_{j=1}^{\bar{j}} d_{tj} \cdot x_j^o - b_t\right) = 0 \qquad \forall t = 1,\ldots,T$$

(28149)

$$\lambda_t^o \geq 0 \qquad \forall t = 1,\ldots,T$$

Eine erste ökonomische Aussage über die LAGRANGEschen Multiplikatoren erhält man, wenn die bedingte Zielfunktion Z nach den finanziellen Kapazitäten b_t differenziert wird.

Dabei wird die Frage beantwortet, wie sich der Zielwert verändert, wenn die Kapazität - in diesem Fall die finanziellen Mittel - um den infinitesimal kleinen Betrag ∂b_t variiert.

$$\frac{\partial Z\ (x_1,\ldots,x_{\bar{j}};\ \lambda_1,\ldots,\lambda_T)}{\partial b_t} = \lambda_t; \qquad \forall t = 1,\ldots,T$$

Bei einer Erhöhung der finanziellen Kapazität um ∂b_t, verändert sich der Gewinn um λ_t.

λ_t drückt somit den marginalen Gewinnzuwachs[1] bei einer Ausweitung der finanziellen Kapazität um ∂b_t aus.

---

[1] Die Ableitung des Grenzgewinns für optimale Produktionsprogramme aus den KUHN-TUCKER-Bedingungen siehe bei LÖCKE, W.: Produktions- und Kostentheorie, 2. durchges. Aufl., Würzburg-Wien 1970, S. 216 ff., bes. S. 262 ff.

Wird auf die Erweiterung der Kapitalkapazität b_t um den Betrag ∂b_t verzichtet, gibt der Wert λ_t,[1] der auch als Opportunitätswert oder Dualvariable bezeichnet werden kann, den Gewinnentgang pro Kapitaleinheit an.

Eine Dimensionsbetrachtung[2] von λ_t^o

$$\frac{\partial Z\,(x^o, \lambda^o)}{\partial b_t} = \lambda_t^o$$

$$\left[\frac{\text{DM/Periode}}{\text{Kapitaleinheit/Periode}}\right] = \left[\text{DM}/\text{Kapitaleinheit}\right]$$

zeigt, daß die LAGRANGEschen Multiplikatoren die Dimension DM/Kapitaleinheit aufweisen. Dieser Quotient drückt somit die Verzinsung einer eingesetzten Kapitaleinheit aus und ist als Renditeausdruck für das Kapital anzusehen. Daraus folgt, daß die Dualvariable λ_t^o dem Kalkulationszinsfuß p entspricht, der einerseits "die langfristig gewünschte Mindestverzinsung der Investitionsobjekte"[3] und andererseits die Mindestrendite für Finanzanlagen angeben soll.

---

[1] Auf die Dualvariablen im Zusammenhang mit den Beziehungen zwischen Primalproblem und Dualproblem wird später eingegangen.
Die Diskussion der Dualvariablen vgl. besonders bei BUHR, W.: Dualvariable als Kriterien unternehmerischer Planung. Die Bedeutung der Dualitätsbeziehungen des mathematischen Programmierens für die entscheidungsbezogene Theorie der Unternehmung, a.a.O., bes. S. 42 ff.

[2] Eine Dimensionsbetrachtung ist grundsätzlich für alle λ_t-Werte möglich; von ökonomischer Relevanz erscheint hier jedoch lediglich die Untersuchung der Optimalwerte λ_t^o, da diese Werte Aussagen über endgültige Dispositionen zulassen.

[3] ALBACH, H.: Investition und Liquidität, a.a.O., S. 86.

Betrachtet man die Gleichung (28148) und sieht vom Fall der Degeneration ab, so folgt für die Optimalwerte[1]

(281491)

$$\lambda_t^o > 0, \text{ wenn } \sum_{j=1}^{\bar{j}} d_{tj} \cdot x_j^o = b_t$$

(281492)

$$\lambda_t^o = 0, \text{ wenn } \sum_{j=1}^{\bar{j}} d_{tj} \cdot x_j^o < b_t$$

Diese Beziehungen, die das Preistheorem von KOOPMANS[2] wiedergeben, besagen rein rechnerisch, daß der Preis bzw. Zinssatz für das eingesetzte Kapital nur dann positiv ist, wenn die vorhandene finanzielle Kapazität voll beansprucht wird

$$(\sum_{j=1}^{\bar{j}} d_{tj} \cdot x_j^o = b_t);$$

in obigem Fall bedeutet das, daß alle Finanzierungsmittel von dem optimalen Lösungsvektor X^o verbraucht werden. Wird dagegen die Kapazität b_t nicht voll ausgeschöpft

$$(\sum_{j=1}^{\bar{j}} d_{tj} \cdot x_j^o < b_t),$$

nimmt λ_t den Wert Null an.

---

[1] Bei der Berechnung mit der Simplexmethode stehen die λ_t-Werte in der letzten Zeile des Optimaltableaus in der Spalte der Schlupfvariablen der betreffenden Restriktion, so daß sich jeder Nebenbedingung eine Dualvariable zuordnen läßt.

[2] Vgl. KOOPMANS, T.C.: Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities. In: Activity Analysis of Production and Allocation. Hrsg. v. T.C. KOOPMANS, New York 1951, S. 33-97, bes. S. 82. BECKMANN, M.J.: Lineare Planungsrechnung, a.a.O., S. 27 f.

Aus diesen Überlegungen folgt der Schluß, daß im Betrieb nur knappe Faktoren "Preise" haben, die größer als Null sind.

Diese Aussage hat jedoch nur für das Optimum rechnerisch Gültigkeit und gestattet nicht die Folgerung, daß alle Faktoren, die nicht voll genutzt werden, am Markt zum Preis von Null Geldeinheiten zu erwerben sind.

Weiterhin können die λ_t-Werte in dem angesprochenen Modell als Preisober- und Preisuntergrenze der finanziellen Faktoren ökonomisch interpretiert werden[1].

Die Unternehmung wird nämlich nur dann eine Kapazitätseinheit der Finanzierungsmittel verkaufen, wenn der Anlagezins größer als λ_t ist und somit eine Finanzanlage einen höheren Ertrag als die Verwendung der Mittel zur Investitionsfinanzierung erbringen würde. Aus dieser Sicht gibt λ_t die Preisuntergrenze für die Anlage der Finanzierungsbeträge in der Periode t an.

Andererseits wird nur dann der Kauf einer zusätzlichen Kapazitätseinheit an Finanzierungsmitteln unter Berücksichtigung der aufgestellten Zielfunktion ökonomisch sinnvoll, wenn sein Preis kleiner als der Zinsfuß λ_t ist, wodurch λ_t zur Preisobergrenze für den Erwerb einer zusätzlichen Kapitaleinheit wird[2].

---

[1] Zu ähnlichen Aussagen führt die Interpretation der Opportunitätswerte bei linearen Produktionsmodellen. Vgl. u.a. HAUPT, P., WEGENER, H.: Wirtschaftlicher Inhalt eines ausgewählten Optimierungsverfahrens. In: WiSt (Wirtschaftswissenschaftliches Studium), Jg. 2 (1973), S. 8-14, hier S. 14.

[2] Zu ähnlichen Aussagen gelangt man, wenn die Beziehungen zwischen Primal- und Dualproblemen linearer Programme betrachtet werden. Vgl. dazu Kapitel 4311.

Die gefundenen Ergebnisse lassen sich leicht auf finanzwirtschaftliche Investitionsmodelle übertragen, in denen auch Finanzierungsvariable y_f ($f = 1,\ldots,\bar{f}$) als Entscheidungsparameter enthalten sind[1].

Die Berechnung der Kalkulationszinsfüße und somit auch der Auf- und Abzinsungsfaktoren in Kapitalwertmodellen mit Hilfe der linearen Programmierung liefert zwar interessante ökonomische Aussagen, jedoch ist die praktische Verwendbarkeit zur Berechnung eines optimalen Budgets nur gering, denn der Kalkulationszinsfuß fällt - wie erwähnt - mit dem optimalen Programm und damit erst durch die Lösung des Entscheidungsproblems an.

Bei einer ex ante Betrachtung wird daher die Berechnung des Kalkulationszinsfußes zur Verteilung der vorhandenen Kapitalbeträge auf die Investitionsobjekte überflüssig.

Dennoch kann die Kenntnis geeigneter Abzinsungsfaktoren unter Umständen nützlich sein.

So lassen sich vor der Aufstellung und Lösung eines simultanen Investitions-Finanzierungsmodells Grenzen angeben, in denen sich die Abzinsungsfaktoren bewegen müssen.

---

[1] Vgl. dazu HAX, H.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 44o f.

Die Kenntnis dieser Grenzen kann für praktische Entscheidungsprobleme eine nicht zu unterschätzende Bedeutung haben[1].

Bei einer späteren realitätsnäheren Betrachtungsweise, die in der zusätzlichen Einführung von Ganzzahligkeitsbedingungen für die Modellvariablen zum Ausdruck kommt, verliert die obige Berechnung von Grenzerfolgssätzen ihre Gültigkeit, da die KUHN-TUCKER-Bedingungen bei diskreten Variablen nicht ohne weiteres heranzuziehen sind und somit Grenzrenditen für infinitesimal kleine Größen bei Ganzzahligkeitsbetrachtungen keine wesentlichen Aussagen liefern.

282 Modell mit der Zielfunktion der Endwertmaximierung

2821 Darstellung des Modells

Der Versuch, die beschriebenen Nachteile[2] der Kapitalwertmodelle zu beseitigen, führte zu Modellen, die eine andere Zielfunktion verfolgen, ohne dadurch die formale Struktur eines linearen Programms zu verlieren[3]. H. HAX[4] und WEINGARTNER[5] verzichten in ihren Ansätzen zur Planung simultaner Investitions- und Finanzierungs-

---

1 Vgl. HAX, H., LAUX, H.: Investitionstheorie, a.a.O., S. 227-284, hier 251.

2 Vgl. HAX, H.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 434 u. S. 446. BLUMENTRATH, U.: Investitions- und Finanzplanung mit dem Ziel der Endwertmaximierung, a.a.O., S. 27o ff.

3 Vgl. HAX, H.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 446.

4 Vgl. HAX, H.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 43o-446, bes. S. 435-446.

5 Vgl. WEINGARTNER, H.M.: Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems, a.a.O., S. 139 ff.

programme auf die Verwendung eines Kalkulationszinsfußes als Wiederanlagesatz freier Mittel und beziehen dafür alle während des Planungszeitraumes gegebenen Reinvestitionsmöglichkeiten[1] in die Betrachtung ein, so daß eine fiktive Anlage finanzieller Mittel zu einem Kalkulationszinsfuß überflüssig wird.

HAX betrachtet einen Planungszeitraum $\bar{T}$ mit den Planungsperioden t (t = 1,...,T). Zu maximieren ist der Endwert des Vermögens[2], der sich am Ende der Periode T aus den Finanzierungs- und Investitionsaktivitäten ergibt[3].

Abgesehen von den jährlich konstanten Entnahmen D_t, die bei dem Maximierungsprozeß in der Zielfunktion vernachlässigt werden können, da sie die Zusammenstellung des Programms nicht beeinflussen, ergibt sich der Endwert des Vermögens aus dem Überschuß der Einnahmen über die Ausgaben in der Periode[4] T.

---

1 Vgl. HAX, H.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 434.

2 Da sich die Modelle von HAX und WEINGARTNER in der Struktur weitgehend gleichen, wird im folgenden nur das Modell von HAX erläutert.

3 HAX entwickelt noch eine zweite Zielfunktion, die in der Maximierung eines gleichbleibenden Periodenentnahmebetrages unter Berücksichtigung eines Mindestvermögens am Ende des Planungszeitraumes besteht. Vgl. HAX, H.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 436 ff. Eine ähnliche Zielfunktion verfolgt KOCH, der die 'repräsentative Entnahme je Jahr' maximiert. Als Nebenbedingung gilt die Einhaltung einer Relation zwischen dem Eigenkapital am Ende des Planungszeitraumes und der Entnahme je Jahr bei der entsprechenden Investitionsalternative. In einem zweiten Ansatz erfährt die Nebenbedingung eine Modifikation in der Weise, daß dem Quotienten aus der repräsentativen Eigenkapitaländerung je Periode und dem repräsentativen Entnahmebetrag pro Periode ein konstanter Wert zugeordnet wird. Vgl. KOCH, H.: Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung. Probleme der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre. Wiesbaden 197o, S. 1oo f. Dieses Modell mag sich für eine Wirtschaftlichkeitsrechnung eignen; für eine simultane Investitions- und Finanzplanung erscheint der Ansatz jedoch weniger zweckmäßig, da keine Liquiditätsbedingungen für die einzelnen Perioden des Planungszeitraumes formuliert werden.

4 Vgl. HAX, H.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 436.

Diese Zielfunktion ist schlüssig, da die finanziellen Mittel, die in vorhergehenden Perioden der Unternehmung zugeführt werden, entweder in Realinvestitionen oder Finanzinvestitionen sofort wieder angelegt werden, so daß der Erfolg des gesamten Investitions- und Finanzierungsprozesses im Endvermögen sichtbar wird.
Somit drückt sich das Ergebnis des Investitions- und Finanzierungsprozesses in dem Bestand an finanziellen Mitteln am Ende der Periode T aus, der dann gleichzeitig dem Betriebsvermögen entspricht[1].

Die ständigen Reinvestitionen der freien Mittel könnten die Verwendung eines Kalkulationszinsfußes bei dieser Zielfunktion vollständig vermeiden, wenn alle finanziellen Transaktionen aus den Investitions- und Finanzierungsvorhaben am Ende des Planungszeitraumes als abgeschlossen zu betrachten wären. Da dies in der Regel aber nicht der Fall sein wird, finden bei HAX die über den Planungszeitraum hinausgehenden Zahlungsströme durch ihre Diskontierung mit einem Kalkulationszinsfuß auf das Ende des Planungszeitraumes T Berücksichtigung, wodurch das Problem der Berechnung von Kapitalwerten nicht umgangen werden kann.

Durch die Langfristigkeit der Investitionsplanung und einem damit verbundenen angepaßten Planungszeitraum müssen jedoch nur relativ wenige Zahlungsströme diskontiert werden, wodurch das Problem der Fixierung des Kalkulationszinsfußes zwar nicht gelöst, seine Bedeutung aber stark reduziert wird.

---

[1] Diese Annahme bedingt, daß die Investitionsobjekte am Ende des Planungszeitraumes den Wert Null annehmen bzw. ein noch vorhandener Restwert in den Zahlungsströmen bereits berücksichtigt ist.

Unter Verwendung der bekannten Symbole und unter Vernachlässigung der Zahlungsströme außerhalb des Planungszeitraumes ergibt sich als Zielfunktion[1]

(28211)

Zielfunktion

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{\bar{j}} d_{Tj} \cdot x_j}_{\text{Einzahlungen}} - \underbrace{\left(\sum_{f=1}^{\bar{f}} g_{Tf} \cdot y_f + D_T \right)}_{\text{Auszahlungen}} = \max!$$

Die Einzahlungen resultieren aus den Einzahlungsüberschüssen d_{Tj} der letzten Periode T der Investitionsobjekte x_j, während die Auszahlungen einerseits aus der konstanten Entnahme D_T und andererseits aus den Auszahlungen (g_{Tf}) der Periode T in Form von Zins- und Tilgungsbeträgen für die Finanzierungsmaßnahmen y_f bestehen[2].

Da D_T = konstant, kann diese Größe in der Zielfunktion unberücksichtigt bleiben.

---

[1] WEINGARTNER berücksichtigt als zusätzliche Modellvariable die zur Verfügung stehende Finanzanlagemöglichkeit. Die Finanzanlage wird jeweils für eine Periode vorgenommen. Vgl. WEINGARTNER, H.M.: Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems, a.a.O., S. 139 ff.

[2] Werden in der letzten Periode T Aktivitäten erstmals in Anspruch genommen, müssen für die betreffenden Investitionsobjekte entsprechend die Auszahlungsüberschüsse ($-d_{Tj}$) und für die Inanspruchnahme der Finanzierungsmaßnahmen die Einzahlungsüberschüsse ($-g_{tf}$) berücksichtigt werden, so daß in diesem - sehr speziellen - Falle die Einzahlungen und Auszahlungen vertauscht werden.

(28211a)

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} d_{Tj} \cdot x_j - \sum_{f=1}^{\bar{f}} g_{Tf} \cdot y_f = \max!$$

Werden auch die über den Planungszeitraum hinausgehenden Zahlungen berücksichtigt, deren Ursache in der Periode $t < T$ liegen, so müssen diese mit einem Zinsfuß p auf das Ende des Planungszeitraumes T abgezinst werden:

D_{Tj} = auf das Ende des Planungszeitraumes bezogener Kapitalwert der über den Planungszeitraum hinausgehenden Einzahlungsüberschüsse der Investition j;

G_{Tf} = auf das Ende des Planungszeitraumes bezogener Kapitalwert[1] der über den Planungszeitraum hinausgehenden Auszahlungsüberschüsse der Finanzierungsmaßnahme f;

T^+ = Zeitpunkt, zu dem die letzte Zahlung eingeht ($T^+ > T$)

$q = 1 + \frac{p}{100}$

Als 'Kapitalwert' D_{Tj} der Investition j ergibt sich

$$D_{Tj} = \sum_{t=T+1}^{T^+} d_{tj} \cdot q^{(T-t)}$$

Entsprechend berechnet sich der 'Kapitalwert' G_{Tf} der Finanzierungsmaßnahme f.

---

[1] In der Regel wird dieser Kapitalwert negativ sein; dennoch geht der Wert wie der Ausdruck g_{Tf} in der Regel als positive Größe in die Zielfunktion ein, da die finanziellen Auswirkungen der Finanzierungsmaßnahmen von denen der Investitionsaktivitäten subtrahiert werden.

$$G_{Tf} = \sum_{t=T+1}^{T^+} g_{tf} \cdot q^{(T-t)}$$

Durch die Berücksichtigung der 'Kapitalwerte' erhält die Zielfunktion folgende Form:

(28211b)

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} (d_{Tj}+D_{Tj}) \cdot x_j - \sum_{f=1}^{\bar{f}} (g_{Tf}+G_{Tf}) \cdot y_f = \max!$$

Die Nebenbedingungen sollen die Aufrechterhaltung des finanziellen Gleichgewichts in jeder Periode gewährleisten.

Wegen der Unterstellung eines deterministischen Modells brauchen keine Liquiditätsreserven gehalten zu werden, so daß bis auf die Periode t = T die Liquiditätsrestriktionen in Gleichungen auszudrücken sind.

Existiert zu Beginn des Planungszeitraumes ein Bestand an liquiden Mitteln L_1, so haben die Liquiditätsbedingungen folgende Gestalt:

Liquiditätsbedingungen

(28212)

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} d_{1j} \cdot x_j - \sum_{f=1}^{\bar{f}} g_{1f} \cdot y_{1f} = D_1 - \hat{L}_1$$

(Liquiditätsbedingung für die Periode 1)

In der ersten Periode entspricht die Differenz aus den Einzahlungsüberschüssen d_{1j} der Investitionstransaktionen und den Auszahlungsüberschüssen g_{1f} der Finanzierungsmaßnahmen der konstanten Entnahme D_1 abzüglich dem Bestand an liquiden Mitteln L_1 zu Beginn der Periode.

Entsprechende Beschränkungen gelten für die folgenden Perioden, in denen jedoch durch die ständigen Reinvestitionen keine Bestände an liquiden Mitteln gehalten werden.

(28213)

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} d_{tj} \cdot x_j - \sum_{f=1}^{\bar{f}} g_{tf} \cdot y_f = D_t$$

(Liquiditätsbedingung für die Perioden $t = 2,\ldots,T-1$)

Da nach der letzten Periode die Planung als abgeschlossen gilt, werden in der Periode $t = T$ keine Reinvestitionen überschüssiger finanzieller Mittel vorgenommen, so daß zur Aufrechterhaltung der Liquidität die Differenz aus Einzahlungen und Auszahlungen größer oder gleich dem Betrag der konstanten Entnahme D_T gefordert wird.

(28214)

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} d_{Tj} \cdot x_j - \sum_{f=1}^{\bar{f}} g_{Tf} \cdot y_f \geq D_T$$

(Liquiditätsbedingung für die Periode T)

Als weitere Restriktionen werden Obergrenzen für die Inanspruchnahme der einzelnen Variablen genannt.

Investitionsbeschränkung

(28215)

$$0 \leqq x_j \leqq X_j; \qquad \forall j = 1,\ldots,\bar{j}$$

X_j = Obergrenze für die Anzahl der Investitionsobjekte j

Finanzierungsbeschränkung

(28216)

$$0 \leqq y_f \leqq Y_f; \qquad \forall f = 1,\ldots,\bar{f}$$

Y_f = Obergrenze für die Finanzierungsmaßnahme f

In den Formulierungen (28215) und (28216) ist die Nichtnegativitätsbedingung für die Modellvariablen bereits enthalten; das Modell kann somit als vollständig beschrieben angesehen werden.

Durch das Vorhandensein von Restriktionen in Gleichungsform (28212 und 28213) stellt die Nullösung im Normalfall keine zulässige Ausgangslösung des Problems dar, so daß die reguläre Simplexmethode als Lösungsverfahren versagt und zur Lösung entweder die Zwei-Phasen-Methode[1] oder die M-Methode[2] Verwendung findet.

---

[1] Zur Beschreibung der Zwei-Phasen-Methode siehe u.a. bei DANTZIG, G.B.: Lineare Programmierung und Erweiterungen, a.a.O., S. 118 ff.

[2] Die M-Methode wird u.a. erläutert bei ANGERMANN, A.: Industrielle Planungsrechnung, Bd. 1, Entscheidungsmodelle, a.a.O., S. 211 ff. KRELLE, W., KÜNZI, H.P.: Lineare Programmierung, Zürich 1958, S. 63. JUDIN, D.B., GOLSTEIN, E.G.: Lineare Optimierung I. Berlin 1968, S. 318 ff.

2822 Diskussion des Modells mit der Zielfunktion der Endwertmaximierung

Sieht man von der Vernachlässigung der Ganzzahligkeitsbedingungen für die Modellvariablen ab[1], so erfüllt das Modell der Vermögensendwertmaximierung den Zweck einer finanzwirtschaftlichen Investitionsplanung, ein optimales, simultan bestimmtes Investitions- und Finanzierungsprogramm unter realitätsbezogenen Prämissen zu erstellen, schon recht gut. Jedoch gelingt der Versuch, mit Hilfe von Investitionsmodellen mit der Zielfunktion der Endwertmaximierung die Verwendung von Kalkulationszinsfüßen zu umgehen, nur in den Fällen, in denen alle Transaktionen und deren Auswirkungen am Ende des Planungszeitraumes abgeschlossen sind.

Gehen Zahlungen noch nach der letzten Periode des Planungszeitraumes ein, verwenden auch die Modelle mit der Zielfunktion der Endwertmaximierung Abzinsungsfaktoren, deren Bedeutung jedoch bei weitem nicht so gravierend ist wie bei den Kapitalwertmodellen, da in der Regel nur ein unwesentlicher Teil der Zahlungsströme diskontiert wird.

---

[1] HAX berücksichtigt bei der Modellbeschreibung und bei der Durchrechnung eines Beispiels eine sehr einschränkende Ganzzahligkeitsbedingung in der Form, daß ein Investitionsobjekt nur einmal oder überhaupt nicht berücksichtigt werden kann.
Vgl. HAX, H.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 442 u. S. 444.
Diese spezielle Form der Ganzzahligkeitsbedingung kann nur als Sonderfall für eine realitätsbezogene Betrachtung angesehen werden. Außerdem sind in dem Beispiel von HAX die Daten so gewählt, daß die optimalen Lösungswerte automatisch durch die Anwendung der Simplexmethode ganzzahlig werden und somit die Anwendung der für die Lösung der Investitionsprobleme typischen Ganzzahligkeitsalgorithmen übergangen wird.

Durch die Herleitung der Dualvariablen im Endwertmodell, die durch die KUHN-TUCKER Bedingungen sowie die Primal-Dual Beziehungen linearer Programme erhalten werden, können entsprechende ökonomische Aussagen hinsichtlich von Aufzinsungs- bzw. Abzinsungsfaktoren wie im Kapitel 2814 gemacht werden[1].

Eine Erweiterung erfährt das Modell durch eine genauere Bezeichnung der Modellvariablen. In diesem Fall wird der Zeitpunkt der Inanspruchnahme der Variablen durch Einführung eines weiteren Index τ gekennzeichnet, der eine realitätsnähere Modellformulierung gestattet[2].

---

[1] Durch die Formulierung des Dualproblems, bei dem im Primalproblem die Maximierung der jährlichen Entnahme D_t unter gleichzeitiger Erhaltung eines bestimmten Betriebsvermögens angestrebt wird, erhält HAX die Aufzinsungsfaktoren für die einzelnen Perioden, wobei für jede Periode die Aufzinsungsfaktoren unterschiedliche Werte annehmen können.
Vgl. HAX, H.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 44o f. HAX, H.: Investitionstheorie, a.a.O., S. 76 ff. BLUMENTRATH erzielt bei einem ähnlich formulierten Endwertmodell durch das duale Problem entsprechende Ergebnisse.
Vgl. BLUMENTRATH, U.: Investitions- und Finanzplanung mit dem Ziel der Endwertmaximierung, a.a.O., S. 82 ff.

[2] Vgl. Kapitel 3.

3 Darstellung und simultane Lösung eines linearen finanzwirtschaftlichen Investitionsmodells

31 Prämissen und Struktur des Modells

311 Prämissen des Modells

3111 Planungszeitraum

Das zu beschreibende Modell soll als Entscheidungshilfe zur Erstellung eines betrieblichen Investitions- und Finanzierungsprogramms dienen. Dabei ist eine vorgegebene Zielfunktion, in die die wesentlichen Aktionsparameter der Unternehmung für den Investitions- und Finanzierungsbereich zwecks langfristiger Investitionsplanung eingehen, unter Einhaltung von Nebenbedingungen zu maximieren.

Wie zuvor bei den beschriebenen Modellen wird auch hier von der Annahme sicherer Erwartungen der zukünftigen Daten ausgegangen.

Diese Annahme, die die theoretische Behandlung des Problems erleichtert, entfernt sich zwar von der ökonomischen Wirklichkeit, doch werden durch die Lösung des simultanen Planungsproblems Aussagen möglich, die auch bei unsicheren Daten Gültigkeit behalten[1].

Außerdem können viele Ergebnisse stochastischer Modelle auch mit modifizierten deterministischen Ansätzen erzielt

---

[1] Vgl. HABERSTOCK, L.: Zur Integrierung der Ertragsbesteuerung in die simultane Produktions-, Investitions- und Finanzierungsplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 17.

werden[1], so daß deterministische finanzwirtschaftliche Investitionsmodelle die betrieblichen Zusammenhänge in ausreichender Form abbilden und somit wichtige Aussagen für den betrieblichen Entscheidungsprozeß liefern können.

Ein besonderes Problem der Investitionsplanung, das auch mit der Unsicherheit der Zukunftsdaten zusammenhängt, erwächst in der Fixierung eines Planungszeitraumes $\bar{T}$.

Der Planungszeitraum $\bar{T}$ besteht im Modell aus t Perioden, die jeweils eine Länge von einem Jahr haben. Die letzte Periode im Planungszeitraum sei die Periode T, so daß $t = 1,\ldots,T$.

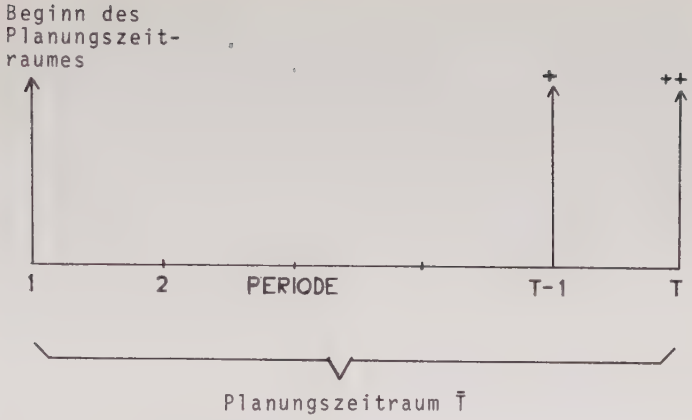
Die Investitions- und Finanzierungsaktionen werden stets zu Beginn einer Periode vorgenommen, wodurch die Periode auf einen Zahlungszeitpunkt zusammenschrumpft und jede Periode nur einen Handlungszeitpunkt aufweist.

In der Periode T-1 können die letzten Handlungsaktionen vorgenommen werden, so daß am Ende des Planungszeitraumes - also zu Beginn der Periode T - nur noch Abschlußzahlungen anfallen und alle zu betrachtenden Planungsvorhaben zu diesem Zeitpunkt als abgeschlossen angesehen werden.

Der Planungszeitraum läßt sich somit graphisch folgendermaßen veranschaulichen:

---

[1] Vgl. u.a. KILGER, W.: Kritische Werte in der Investitions- und Wirtschaftlichkeitsrechnung. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 35 (1965), S. 338-352. JACOB, H.: Zum Problem der Unsicherheit bei Investitionsentscheidungen. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 37 (1967), S. 153-187. LAUX, H.: Flexible Planung des Kapitalbudgets mit Hilfe der linearen Programmierung. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Jg. 21 (1969), S. 728-742. HAX, H., LAUX, H.: Investitionstheorie, a.a.O., S. 227-284, hier S. 227.



$^{+}$ Letzter Zeitpunkt für neu durchzuführende Aktionen

$^{++}$ Planungshorizont, an dem lediglich Abschlußzahlungen anfallen können.

Abb. 4

Die Langfristigkeit der Investitionsplanung erfordert einerseits die Berücksichtigung eines möglichst großen Planungszeitraumes; andererseits sollte der Planungszeitraum zeitlich so bestimmt sein, daß eine Vorausschau der ökonomischen Transaktionen[1] gewährleistet ist, damit die Unsicherheit der Zukunft durch die sinnvolle Begrenzung des Planungszeitraumes weitgehend ausgeschaltet wird.

Diese Unsicherheit bezieht sich auf die in das Modell einfließenden Daten und die zu erfassenden Modellvariablen.

---

[1] Vgl. auch LOCKE, W.: Die Finanzplanung im Rahmen der betrieblichen Finanzpolitik. In: Essays in Honour of Antonio de Viti de Marco. Hrsg. v. Cacucci, Bari 1972, S. 319. WITTMANN, W.: Unternehmung und unvollkommene Information. Köln und Opladen 1959, S. 142.

Um aus dem "Dilemma"[1] der Fixierung des Planungshorizontes halbwegs herauszukommen, wird die Verwendung moderner Prognoseverfahren[2] in Hinblick auf die zu erwartenden Zahlungsströme sowie auf die Fortentwicklung der zu betrachtenden Investitionsobjekte unerläßlich, so daß die Prognosemöglichkeiten zu einem wesentlichen Bestimmungsfaktor des Planungshorizontes werden.

Die Fixierung von Entscheidungen zum Zeitpunkt t = 1, die erst in späteren Perioden t des Planungszeitraumes $\bar{T}$ wirksam werden, kann nicht die Erstellung eines nicht zu revidierenden Investitions- und Finanzierungsprogramms für den gesamten Planungszeitraum $\bar{T}$ bedeuten; vielmehr ist es Aufgabe einer dynamischen Planung, das für die erste Periode zu ermittelnde Programm, für das auch relativ zuverlässige Daten vorliegen, zu berechnen[3] und durch die grobe Festlegung zukünftiger Entscheidungsparameter die interdependenten Beziehungen zu berücksichtigen, die zwischen gegenwärtigen und zukünftigen Entscheidungen bestehen.

Aus dieser Sicht muß der Planungshorizont als der Zeitpunkt angesehen werden, "bei dem zukünftige Investitions- und Finanzierungsmöglichkeiten gerade noch einen Einfluß auf die Gestaltung des gegenwärtig zu erstellenden Investitionsbudgets haben können"[4].

---

1 BLOHM, H., LÜDER, K.: Investition, a.a.O., S. 173.

2 Zur Prognose von Modelldaten vgl. GRÄTER, H.: Die Auswahl optimaler Entwicklungsprogramme unter Berücksichtigung von Investitions-, Produktions- und Absatzinterdependenzen. Frankfurt-Zürich 1972, bes. S. 91 ff.

3 Vgl. BLUMENTRATH, U.: Investitions- und Finanzplanung mit dem Ziel der Endwertmaximierung, a.a.O., S. 235.

4 ALBACH, H.: Investition und Liquidität, a.a.O., S. 226.

Das Planungsprinzip der zu revidierenden zukünftigen Entscheidungen, das durch unsichere Erwartungen und mangelnde Informationen erforderlich wird[1], führt zu einer rollierenden oder revolvierenden Planung, bei der jeweils nach einer Periode die getroffenen Entscheidungen für zukünftige Perioden revidiert werden können, so daß durch die Verarbeitung der neuesten Daten eine zeitlich überlappte Planung[2] entsteht, die sich der verändernden Umwelt anpaßt[3] und somit eine beachtliche Flexibilität erreichen kann.

Voraussetzung dafür wird die Durchrechnung des Problems unter Berücksichtigung der aktuellen Daten nach jeweils einer Periode.

Auf diese Weise versucht die langfristige Investitions- und Finanzplanung einen Zeitraum von vier bis sechs Jahren zu umfassen, bei dem durch die rollierende Planung zunächst nur die erste Periode als determiniert gelten kann.

---

[1] Vgl. BLUMENTRATH, U.: Investitions- und Finanzplanung mit dem Ziel der Endwertmaximierung, a.a.O., S. 235.

[2] Zum Prinzip der revolvierenden Planung vgl. Art. Planung (H. KOCH): Handwörterbuch der Betriebswirtschaft,Bd. 3, 3. Aufl., Stuttgart 1960, Sp. 4346 f. ALBACH, H.: Investition und Liquidität, a.a.O., S. 227. JACOB, H.: Zum Problem der Unsicherheit bei Investitionsentscheidungen, a.a.O., S. 158. WITTMANN, W.: Unternehmung und unvollkommene Information, a.a.O., S. 138.

[3] Die Veränderung von Daten kann nicht nur eine Planrevision zukünftiger Entscheidungen bewirken, sondern SWOBODA geht sogar soweit, gegebenenfalls bereits realisierte Investitionsentscheidungen rückgängig zu machen. Die allgemeine Gültigkeit dieses Vorgehens muß jedoch in Frage gestellt werden. Vgl. SWOBODA, P.: Die Ermittlung optimaler Investitionsentscheidungen durch Methoden des Operations Research, a.a.O., S. 102.

3112 Zahlungsreihenprämisse und Zurechnungsproblem

In dem Modell wird unterstellt, daß jeder Modellvariablen während des Planungszeitraumes eine deterministische Zahlungsreihe zugeordnet werden kann; das bedeutet einerseits, daß die Auswirkungen der Modellaktivitäten durch Zahlungsströme meßbar sind, was bei Unterstellung der in Kapitel 3122 aufgestellten Zielfunktion auch realistisch erscheint. Die Zahlungszurechenbarkeit bereitet dagegen bei den einzelnen Modellvariablen unterschiedliche Schwierigkeiten.

Während sich die Zahlungsvorgänge bei Finanzierungstransaktionen durch fest vereinbarte Zins- und Tilgungskonditionen verhältnismäßig leicht erfassen lassen, wird die Zurechenbarkeit von Zahlungsströmen zu Investitionsobjekten problematisch.

Bei den wenigen Investitionen mit direkter Zahlungszurechnung[1], von denen ein periodischer Zahlungsstrom kausal abhängig ist, löst sich das Zurechnungsproblem von selbst.

Dieser Fall liegt im einstufigen Einproduktartenbetrieb vor. Das weitaus größere Investitionsvolumen zeichnet sich jedoch dadurch aus, daß die direkte Beziehung zwischen den Zahlungen und den Investitionsobjekten fehlt, wodurch den Investitionsobjekten Zahlungen nur über zahlungsverursachende Aktivitäten[2] - wie z.B. produkt- und absatzbezogene Größen - zuzuordnen sind.

Damit ergibt sich ein Zurechnungsproblem, das durch Analyse und Aufschlüsselung der Zahlungsgrößen zu lösen ist.

---

[1] Vgl. BLUMENTRATH, U.: Investitions- und Finanzplanung mit dem Ziel der Endwertmaximierung, a.a.O., S. 323.

[2] Vgl. auch BLUMENTRATH, U.: Investitions- und Finanzplanung mit dem Ziel der Endwertmaximierung, a.a.O., S. 325 f.

312 Struktur des Modells

3121 Modellvariable

31211 Investitionsvariable

Das Modell, das aus einer zu maximierenden Zielfunktion und Nebenbedingungen besteht, berücksichtigt ausschließlich lineare Beziehungen zwischen den einzelnen Modellvariablen des simultanen Investitions- und Finanzierungsproblems.

Diese Unterstellung, die den realistischen Gegebenheiten einer simultanen Finanz- und Investitionsplanung weitgehend entspricht[1], führt zu einem Modell mit einer linearen Zielfunktion und linearen Nebenbedingungen.

Als Modellvariable sind zunächst alle Sachinvestitionsalternativen $x_{j\tau}$ $(j = 1,\ldots,\bar{j})$ zu erfassen, die für die Unternehmung zur Auswahl stehen und sich durch die Art des Objekts und den Anschaffungszeitpunkt τ unterscheiden[2]. Bei der Auswahl der Investitionsobjekte wird vorwiegend an größere Objekte wie z.B. maschinelle Anlagen gedacht. Diese Sachinvestitionen verursachen Zahlungsströme, wobei davon ausgegangen werden soll, daß die Zahlungsströme den einzelnen Investitionen zurechenbar sind[3].

---

[1] Vgl. SWOBODA, P.: Die Ermittlung optimaler Investitionsentscheidungen durch Methoden des Operations Research, a.a.O., S. 96 ff.

[2] Der letztmögliche Zeitpunkt zur Realisierung neuer Aktivitäten liegt in T-1, so daß $\tau = 1,\ldots,T-1$.

[3] Auf die Problematik dieser Annahme sei hier nochmals verwiesen. Dabei hängt es jeweils von dem konkreten Planungsfall ab, ob diese Voraussetzung unterstellt werden darf.

Bei der Investitionsplanung müssen zunächst einmal die Abhängigkeiten der Aggregate untereinander - sofern derartige Abhängigkeiten bestehen - erfaßt und in dem Modell berücksichtigt werden. Sie können durch eine gründliche Analyse festgestellt werden und in Nebenbedingungen ihren Ausdruck finden.

Eine große Schwierigkeit bereitet einer dynamischen Investitionsplanung - die im Zeitablauf zu mehreren aufeinander folgenden Investitionsprogrammen führt[1] - die Erfassung der zukünftigen Investitionsmöglichkeiten und der zugehörigen zahlungswirksamen Auswirkungen[2]. Dazu muß die Prognose des technischen Fortschritts, der Produkt- und Absatzentwicklung und der damit zusammenhängenden zukünftigen Einnahmen- und Ausgabenströme erfolgen.

Durch die Langfristigkeit der Investitionsplanung wird es trotz gründlicher Analysen kaum möglich sein, zu Beginn des Planungszeitraumes alle Investitionsalternativen für den gesamten Planungszeitraum zu er-

---

[1] Die zeitlich aufeinander folgenden Investitionsprogramme können als mehrstufige Investitionsprogramme bezeichnet werden. Vgl. FLEIG, W.: Investitionsmodelle als Grundlage der Investitionsplanung, a.a.O., S. 251. ALBACH spricht von dynamischen - im Gegensatz zu den statischen - Modellen. Vgl. ALBACH, H.: Investition und Liquidität, a.a.O., S. 227 u. S. 316.

[2] Vgl. BLOHM, H., LÜDER, K.: Investition, a.a.O., S. 173. SCHNEIDER, D.: Investition und Finanzierung, a.a.O., S. 159.

fassen, so daß die Fixierung der Investitionsvariablen x_j ($j = 1,\ldots,\bar{j}$) nur als eine mögliche - jedoch nicht vollständige - Auswahl der sich im Zeitablauf anbietenden Investitionsalternativen angesehen werden muß[1].

Auch hier wird die Beschaffung zuverlässiger Informationen zu einem wichtigen Planungsindiz. Je zuverlässiger die jeweils beschafften Informationen sind, um so größer ist die Verwendbarkeit der erzielten Rechenergebnisse für die Disposition der Unternehmensführung[2].

Aus den an anderer Stelle genannten Gründen wird auf die Einbeziehung von Produktvariablen in das Modell verzichtet, so daß davon ausgegangen wird, daß das zu berechnende Produktionsprogramm keinen Einfluß auf das simultan bestimmte Investitions- und Finanzierungsprogramm ausübt.

Eine indirekte Einbeziehung der Produktvariablen in das Modell gelingt dann, wenn eindeutige Beziehungen zwischen den Produktvariablen und den Investitionsvariablen bestehen, so daß die Produktvariablen durch letztere ausgedrückt werden können.

---

[1] Die Erfassung neuer im konkreten Fall auftretender Alternativen bzw. die rationale Bestimmung aller in Betracht zu ziehender Alternativen kann noch nicht als zufriedenstellend gelöstes Problem angesehen werden. Vgl. SCHNEIDER, D.: Zielvorstellungen und innerbetriebliche Lenkungspreise in privaten und öffentlichen Unternehmen, a.a.O., S. 264. IHDE, G.-B.: Grundlagen der Rationalisierung. Theoretische Analyse und praktische Probleme, a.a.O., S. 2o.

[2] Vgl. NIEMEYER, G.: Investitionsentscheidungen mit Hilfe der elektronischen Datenverarbeitung, a.a.O., S. 168.

31212 Finanzierungsvariable

Durch die im Zeitpunkt der Realisierung der Investition entstehenden Anschaffungsauszahlungen, die vom Investitionsobjekt selbst erst durch Bewirkung späterer Einzahlungen wieder gedeckt werden können, ergibt sich im Anschaffungszeitpunkt ein Finanzbedarf, dessen Höhe besonders von dem Anschaffungsbetrag der Investition und der Zeitspanne zwischen der Festlegung des Betrages und dem einsetzenden Einzahlungsstrom abhängt[1].

Zur Finanzierung des Investitionsprogramms steht der Unternehmung ein Finanzierungspektrum aus den Finanzierungsvariablen $y_{f\tau}$ $(f = 1,...\bar{f})$ zur Verfügung, aus dem das optimale Finanzierungsprogramm simultan mit dem Investitionsprogramm zu erstellen ist.

Die Finanzierungsaktivitäten unterscheiden sich in der Höhe der möglichen Inanspruchnahme, der Laufzeit, den Tilgungsmodalitäten und Zinskonditionen sowie dem Zeitpunkt τ der Inanspruchnahme[2].

Als Finanzierungsarten[3] für die Investitionsplanung sollen vorwiegend die

---

[1] Vgl. WITTE, E.: Die Liquiditätspolitik der Unternehmung. Tübingen 1963, S. 28.

[2] Als letzter Zeitpunkt der Inanspruchnahme neuer Finanzierungsaktivitäten gilt die Periode T-1, so daß auch hier $\tau = 1,...,T-1$.

[3] Die Darstellung und Gliederung der Finanzierungsarten in der Literatur ist kaum noch übersehbar, so daß hier nur eine Literaturauswahl angegeben werden kann, die keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt. Vgl. u.a. HAX, K.: Die langfristigen Finanzierungsdispositionen, a.a.O., S. 455-54o, bes. S. 467 ff. WÖHE, G.: Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, 8. unveränderte Aufl., Berlin-Frankfurt/M. 1968, bes. S. 361 ff. JANBERG, H.: Finanzierung und Finanzpolitik. In: Finanzierungshandbuch. Hrsg. v.H. JANBERG. 2. Aufl., Wiesbaden 197o, S. 25-63. Art. Finanzierung (L. BECKMANN), a.a.O., Spalte 183o-1834. VORMBAUM, H.: Finanzierung der Betriebe, a.a.O., bes. S. 22 ff.

a) langfristige Fremdkapitalaufnahme und
b) Eigenkapitalaufnahme

in die Betrachtung einbezogen werden.

Die langfristige Fremdkapitalaufnahme umfaßt die Zuführung von Finanzierungsmitteln aus Kreditaufnahme. Als Kreditgeber bieten sich sowohl Banken als auch andere Gläubiger an.

Der Fremdkapitalgeber ist Gläubiger der Unternehmung und hat Anspruch auf Rückzahlung des zur Verfügung gestellten Betrages zu dem vereinbarten Zeitpunkt sowie auf Verzinsung des Kreditbetrages[1].

Eine kurzfristige Kapitalaufnahme beschränkt sich auf Finanzierungsmittel, die im allgemeinen eine Laufzeit von weniger als ein Jahr aufweisen und wegen der Fristenkongruenz der Bilanzpositionen zur Finanzierung der Investitionen nur bedingt in Frage kommen.

Als Eigenkapitalfinanzierung wird die Kapitalbeschaffung durch eine Eigenkapitalerhöhung bezeichnet, bei der die Kapitaleigner des Unternehmens weiteres Kapital zur Verfügung stellen und/oder neue Kapitalgeber zu Eignern der Unternehmung werden[2].

---

[1] Vgl. VORMBAUM, H.: Finanzierung der Betriebe, a.a.O., S. 3o.

[2] Diese Art der Eigenkapitalfinanzierung wird von SWOBODA als "Eigenfinanzierung im engeren Sinne" bezeichnet, da in diesem Begriff die Finanzierung aus nicht ausgeschütteten Gewinnen - Selbstfinanzierung - nicht inbegriffen ist. Vgl. SWOBODA, P.: Investition und Finanzierung, a.a.O., S. 13.

Eine feste Verzinsung der Kapitaleinlage steht den Kapitalgebern nicht zu[1], sondern es existiert lediglich ein Anspruch auf einen eventuell auszuschüttenden Gewinnanteil. Da das Eigenkapital von der Unternehmung nicht fest verzinst wird, muß zur Bewertung ein fiktiver Zinssatz herangezogen werden.

Durch die weitgehende Starrheit und den großen Verwaltungsaufwand bei der formalen Durchführung einer Eigenkapitalerhöhung von Kapitalgesellschaften wird diese Finanzierungsform nur in außergewöhnlichen Fällen und vorwiegend bei Projekten mit überdimensionalem Kapitalbedarf herangezogen[2].

Nicht alle Finanzierungsarten bzw. Finanzierungsformen stehen dem Unternehmen in der Höhe des offiziell gewährten Betrages zur Verfügung, sondern es ist in einigen Fällen denkbar, daß die Kapitalzufuhr den Nennwert der Finanzierungsaktivität übersteigt oder aber auch unterschreitet.

So wird z.B. bei der Kapitalbeschaffung durch Ausgabe von Schuldverschreibungen[3] in der Regel ein Disagio δ_f gewährt, das im allgemeinen 1-4 % des Nennwertes ausmacht und als Differenz zwischen dem Ausgabekurs und dem Nennwert der betrachteten Schuldverschreibung dem Kreditgeber vergütet wird.

---

1 Vgl. VORMBAUM, H.: Finanzierung der Betriebe, a.a.O., S. 29.

2 Bei Personengesellschaften kann diese Finanzierungsform flexibler gehandhabt werden.

3 Die Möglichkeit der Ausgabe von Schuldverschreibungen ist an die Erfüllung verschiedener Erfordernisse geknüpft, die nur größeren Kapitalgesellschaften die Beschaffung finanzieller Mittel auf diesem Wege zugänglich machen. Vgl. u.a. WOHLFARTH, K., BLEY, S.: Grundlagen und Praxis des Wertpapiergeschäfts, 2. neubearb. Aufl., Stuttgart 1971, S. 16o ff. UNGNADE, D.: Das rentenmarktpolitische Instrumentarium. In: Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen. Jg. 25 (1972), S. 952-954.

Andererseits kann bei einer Eigenkapitalerhöhung - besonders bei Aktiengesellschaften - ein Aufgeld, Agio δ_f, erhoben werden, das den Überschuß des Ausgabekurses über den Nennwert ausmacht.

Das Agio bedeutet einen zusätzlichen Kapitalzufluß zu dem Nennbetrag der Kapitalerhöhung.

Die Erfassung eines Disagio oder Agios in unserem Modell erfolgt in folgender Form:

$$\delta_f \quad \begin{cases} > 0, \text{ Disagio} \\ < 0, \text{ Agio} \end{cases}$$

δ_f = Agio oder Disagio der Finanzierungsart f in Prozent des Nennbetrages. Der Prozentsatz wird als Dezimalwert ausgedrückt.

Dann ergibt sich der effektiv zur Verfügung stehende Finanzierungsbetrag der Finanzierungsart f aus $(1- \delta_f)\, y_f$.

Bei den beiden zuletzt erwähnten Finanzierungsformen darf nicht unerwähnt bleiben, daß ihre Inanspruchnahme in der Regel einen recht großen Kapitalbedarf bedingt, so daß die Ausgabe von Schuldverschreibungen und auch Eigenkapitalerhöhungen schon wegen der verhältnismäßig hohen Abwicklungskosten nur bei größeren - und aus abwicklungstechnischen Gründen - glatten Beträgen zu vertreten sind[1].

In der Regel handelt es sich dabei um Millionenbeträge bzw. um Dimensionen, die sechsstellige Summen darstellen.

---

[1] Die betragsmäßigen Möglichkeiten der Inanspruchnahme einzelner Finanzierungsmittel hat einen erheblichen Einfluß auf die später in das Modell einzuführenden Ganzzahligkeitsbedingungen. Vgl. Kapitel 41.

Ein zusätzliches Auswahlkriterium für die Inanspruchnahme der einzelnen Finanzierungsformen kann die Aufstellung von Finanzierungsregeln liefern.

Die Berücksichtigung von Finanzierungsregeln[1], die Relationen zwischen ausgesuchten Bilanzpositionen herstellen und somit die Einhaltung von finanziellen Normen erzwingen, kann in Nebenbedingungen erfolgen.

Auch bei den Finanzierungsaktivitäten ergibt sich, besonders bezüglich der Möglichkeiten und Konditionen, das Problem der Prognose, es ist jedoch im Vergleich zur Prognose der Größen im Investitionsbereich von untergeordneter Bedeutung.

---

[1] Zur Darstellung von Finanzierungsregeln vgl. u.a.: HÄRLE, D.: Finanzierungsregeln und Liquiditätsbeurteilung. In: Finanzierungshandbuch. Hrsg. v.H. JANBERG. 2. Aufl., 1970, S. 89-110. HÄRLE, D.: Finanzierungsregeln und ihre Problematik. Wiesbaden 1961. S. 20-52. ANTOINE, H.: Kennzahlen, Richtzahlen, Planungszahlen, 2. Aufl., Wiesbaden 1958. GERSTNER, P.: Bilanzanalyse, 11. Aufl., Berlin 1944.
Auf die Problematik der Finanzierungsregeln weist auch D. SCHNEIDER hin. Vgl. SCHNEIDER, D.: Investition und Finanzierung, a.a.O., S. 397 ff. Vgl. auch GUTENBERG, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Bd. 3, Die Finanzen, a.a.O., S. 277 ff.
Die Berücksichtigung von Finanzierungsregeln in mathematisch formulierten Modellen siehe bei: MEYHAK, H.: Simultane Gesamtplanung im mehrstufigen Mehrproduktunternehmen. Ein Modell der dynamischen linearen Planungsrechnung. Wiesbaden 1970, S. 339 ff. u. bes. S. 465. WISSENBACH, H.: Die Bedeutung der Finanzierungsregeln für die betriebliche Finanzpolitik. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung. N.F., Jg. 16 (1964), S. 447-456.
Eine grundsätzliche Berücksichtigung von Finanzierungsregeln in der Formulierung einer Nebenbedingung als Bestandteil unseres Modells wäre ohne weiteres möglich, jedoch nicht sinnvoll, vgl. S. 106.

31213 Finanzanlagevariable

In jeder Periode können überschüssige liquide Mittel k_t für eine Periode zum Zinssatz $z_{H,t}$ angelegt werden, so daß die Unternehmung in der Periode t+1 eine Einzahlung aus der Finanzanlage k_t in Höhe von $(1+z_{H,t})\ k_t$ erhält

Diese Finanzanlage muß aus rentabilitätsmäßigen Erwägungen in die Betrachtung einbezogen werden und wird formal wie eine Sachinvestition behandelt.

3122 Zielfunktion

31221 Wahl der Zielfunktion

Die Entscheidungsfindung im Betrieb und die damit verbundene Erstellung eines optimalen Investitions- und Finanzierungsprogramms kann nicht Selbstzweck[1] sein, sondern es müssen Kriterien aufgestellt werden, an denen sich die Entscheidungen orientieren.

An den vorgegebenen Entscheidungszielen - auch Zielsetzung, Zielsystem oder Zielvorstellung genannt[2] - läßt sich ex post ablesen, inwieweit die getroffene Entscheidung sinnvoll war und der Zielvorstellung entspricht.

---

1 KOCH sieht daher die Unternehmung als "System von zweckmotivierten Handlungen" an. Vgl. KOCH, H.: Betriebliche Planung. Wiesbaden 1961, S. 15.

2 Vgl. KOCH, H.: Über eine allgemeine Theorie des Handelns. In: Zur Theorie der Unternehmung. Festschrift zum 65. Geburtstag von E. GUTENBERG. Hrsg. v. H. KOCH, Wiesbaden 1962, S. 4o4. SCHMIDT-SUDHOFF, U.: Unternehmerziele und unternehmerisches Zielsystem. Wiesbaden 1967, S. 23. HAX, H.: Bewertungsprobleme bei der Formulierung von Zielfunktionen für Entscheidungsmodelle. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Jg. 19 (1967), S. 749-761. BIDLINGMAIER, J.: Zielkonflikte und Zielkompromisse im unternehmerischen Entscheidungsprozeß, Wiesbaden 1968, S. 19 f.

Das setzt voraus, daß die Zielvorstellung - sei es die der gesamten Unternehmung bzw. die von Teilbereichen - klar formuliert wird.

Anderenfalls lassen sich die Zielsetzungen als Kriterien für das Maß der Güte einer Entscheidung nur schwer heranziehen[1].

Die mathematische Formulierung der Zielvorstellung der Unternehmung erfolgt in der Zielfunktion[2].

Die Zielfunktion gibt somit Auskunft, in welcher Weise sich die Zielvariablen, d.h. die Variablen, die in die Zielfunktion eingehen, entwickeln sollen[3], ob z.B. der aus der Zielfunktion resultierende Zielwert zu maximieren oder zu minimieren ist, oder ob ein fest vorgegebener Wert angestrebt werden soll.

Die Zielfunktion kann für die Unternehmung zu Beginn eines Planungszeitraumes kein Datum sein, sondern ihre Fixierung muß im Rahmen der langfristigen Unternehmenspolitik als eine Hauptaufgabe der Unternehmensleitung[4] betrachtet werden.

---

1 Gedacht wird dabei an global formulierte ethische, soziale und andere schwer quantifizierbare Prinzipien, die HEINEN unter dem Begriff der nicht monetären Zielvorstellungen zusammenfaßt. Vgl. HEINEN, E.: Die Zielfunktion der Unternehmung. In: Zur Theorie der Unternehmung. Festschrift zum 65. Geburtstag v. E. GUTENBERG. Hrsg. v. H. KOCH, Wiesbaden 1962, S. 18.

2 Vgl. HABERSTOCK, L.: Zur Integrierung der Ertragsbesteuerung in die simultane Produktions-, Investitions- und Finanzierungsplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 26.

3 Vgl. KAHLE, E.: Zielplanung durch Anspruchsanpassung. In: Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis, Jg. 23 (1971), S. 625.

4 Vgl. GUTENBERG, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Bd. 1. Die Produktion, a.a.O., S. 134.

Die Aufgabe der Unternehmensleitung beschränkt sich nicht nur in der Vorgabe der Zielmaxime, sondern es sind weiterhin die Zielvariablen, ihre Beziehungen zueinander sowie die vorhandenen Alternativen[1] zu analysieren und Zielvariable, die keinen Bezug zu dem Entscheidungsproblem haben, zur Vermeidung von Fehlentscheidungen aus dem Entscheidungsfeld zu eliminieren[2].

In dem mathematisch formulierten Entscheidungsmodell, das der Betrachtung zugrunde liegt, können somit nur Größen Eingang finden, die quantitativ formuliert werden können, d.h. es muß versucht werden, ökonomische Größen in äquivalente formale Strukturen zu transformieren.

Die Zielsetzung der Unternehmung, nach denen sich die Handlungsmaxime der Entscheidenden ausrichtet, zählt zu den systembezogenen Tatbeständen[3] und unterliegt den verschiedensten Ausprägungen.

In den betriebswirtschaftlichen Entscheidungsmodellen wird weitgehend vom Prinzip der absoluten Gewinnmaximierung[4] bzw. der relativen Gewinnmaximierung[5] ausgegangen.

---

[1] Vgl. KAHLE, E.: Zielplanung durch Anspruchsanpassung, a.a.O., S. 625.

[2] Vgl. KAHLE, E.: Zielplanung durch Anspruchsanpassung, a.a.O., S. 625.

[3] Vgl. GUTENBERG, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Bd. 1, Die Produktion, a.a.O., S. 452-455, bes. S. 455.

[4] Vgl. HAX, H.: Die Koordination von Entscheidungen, Köln-Berlin-Bonn-München 1965, S. 27 u. S. 3o.

[5] Vgl. PACK, L.: Maximierung der Rentabilität als preispolitisches Ziel. In: Zur Theorie der Unternehmung. Festschrift zum 65. Geburtstag von E. GUTENBERG. Hrsg. v. H. KOCH, S. 75 f. PACK sieht die relative Gewinnmaximierung in Form der Rentabilitätsmaximierung als preispolitisches Ziel der Unternehmung an. Es ist dabei fragwürdig, ob dieses Prinzip einem "rationalen Verhalten" entspricht, da bei Realisierung des Rentabilitätsmaximums unter Umständen auf zusätzlichen Gewinn verzichtet wird. STUHR zeigt an einem Beispiel, daß das Rentabilitätsprinzip nicht immer einem rationalen Verhalten entspricht.

Vgl. STUHR, R.: Das Rationalitätsprinzip in Beziehung zu den Prinzipien der Rentabilitäts- und Gewinnmaximierung. In: Betriebswirtschaftliche Forschung und

Diese Form der Zielsetzung mußte sich einer harten Auseinandersetzung unterziehen[1], deren Argumente sich besonders auf die Unterstellung einer einseitigen Betrachtungsweise und Realitätsferne stützen.

Dieser Kritik kann entgegengetreten werden, wenn das Gewinnstreben lediglich als Modellmaxime aufgefaßt wird, die die Realität zwar nicht voll erfaßt, jedoch "als erste Annäherung an die Realität für theoretische Ableitungen eine naheliegende und nützliche Arbeitshypothese"[2] darstellt.

Die Zielfunktion finanzwirtschaftlicher Investitionsmodelle, die die Mittelherkunft, die Mittelverwendung und somit das auszuwählende Investitions- und Finanzierungsprogramm weitgehend bestimmt, bestand bis vor einigen Jahren in der Literatur vor allem in der Maximierung von Kapitalwerten der Modellaktivitäten, die als eine Art der Gewinnmaximierung anzusehen ist[3].

Diese Zielsetzung[4] entfällt für unsere Betrachtung, da durch die spätere Berücksichtigung von Ganzzahligkeitsbedingungen für die Variablen des Modells das Optimum

---

1 Vgl. u.a. MEANS, G.C.: Collective Enterprise and Economic Theory. In: Die Konzentration in der Wirtschaft. Bd. 3. Hrsg. v. H. ARNDT, Berlin 1960, S. 153o f. KATONA, G.: Das Verhalten der Verbraucher und Unternehmer. Tübingen 1960, S. 13. GUTENBERG, E.: Über einige Fragen der neueren Betriebswirtschaftslehre. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft 1966, Ergänzungsheft, S. 1 ff. MOXTER, A.: Methodologische Grundfragen der Betriebswirtschaftslehre. Köln 1957, S. 12-3o.

2 HEINEN, E.: Die Zielfunktion der Unternehmung, a.a.O., S. 13.

3 Vgl. LOCKE, W.: Investitionsrechnung - aber wie? a.a.O., S. 153.

4 Wie in jüngeren Arbeiten nachgewiesen wurde, wird unter bestimmten Voraussetzungen das optimale Investitions- und Finanzierungsprogramm bei der Unterstellung der Kapitalwertmaximierung dem Programm entsprechen, das auch der Zielfunktion der Endwertmaximierung gehorcht. Vgl. SCHWEIM, J.: Integrierte Unternehmensplanung, a.a.O., S. 53 ff. LAUX, H., FRANKE, G.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe von Kapitalwerten. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung. Jg. 21 (1969), S.43-56.

leicht verfehlt werden kann und das berechnete Investitions- und Finanzierungsprogramm der Zielfunktion nicht immer gerecht wird[1].

Betrachtet man einen Planungszeitraum, in dem sich die Investitions- und Finanzierungsaktionen vollziehen[2], und lassen sich - wie unterstellt wurde - die Auswirkungen der Investitions- und Finanzierungstransaktionen durch Zahlungsströme abbilden, dann "wird ein erwerbswirtschaftlich orientierter Betrieb bestrebt sein, so zu disponieren, daß sich am Ende des Planungszeitraums ein maximales Betriebsvermögen ergibt"[3].

Auf die simultane Investitions- und Finanzplanung übertragen ergibt sich das Betriebsvermögen am Ende des Planungszeitraumes aus der Differenz der Einzahlungen und Auszahlungen der Investitions- und Finanzierungsakti-

---

[1] Den Beweis liefern LAUX und FRANKE, die zeigen, daß bei restriktiven Ganzzahligkeitsbedingungen die Kapitalwertmethode das Optimum verfehlt. Auf eine eigene Beweisführung soll hier verzichtet werden. Vgl. dazu LAUX, H., FRANKE, G.: Das Versagen der Kapitalwertmethode bei Ganzzahligkeitsbedingungen. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung. Jg. 22 (1970), S. 517-527, bes. S. 522 ff.

[2] Durch die Fixierung eines festen Planungszeitraumes $t = 1,\ldots,T$, in dem sich die geplanten betrieblichen Vorgänge vollziehen sollen, liegt ein - in zeitlicher Hinsicht - betriebliches Totalmodell vor, so daß der Aufwand im Planungszeitraum zu Auszahlungen und der Ertrag zu Einzahlungen führt. Im Hinblick auf die Finanzplanung, der Aufstellung eines Finanzplanes und Finanzierungsprogramms interessieren hier vordringlich die Zahlungsströme.

[3] HAX, H.: Investitions- und Finanzierungsplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 436.

vitäten[1].

Diese Aussage beruht auf der Annahme, daß alle Transaktionen in Form von Zahlungsströmen erfaßt werden und die Planung am Ende der letzten Periode als abgeschlossen gilt.

Somit liegt durch die ständigen Reinvestitionen freier finanzieller Mittel das Ergebnis des Planungsprozesses am Ende der letzten Planungsperiode als kumulierter Zahlungsüberschuß bzw. -fehlbetrag der einzelnen Aktivitäten vor.

Dieser Zahlungsüberschuß, der den Totalgewinn[2] ausdrückt, soll maximiert werden; d.h. es ist ein simultanes Investitions- und Finanzierungsprogramm zu erstellen, das die Differenz aus Einzahlungen und Auszahlungen am Ende des Planungszeitraums möglichst groß werden läßt.

In die Zielfunktion gehen dabei alle Abschlußzahlungen, d.h. die Zahlungen in der Periode T, für die einzelnen Modellvariablen ein.

Die Gültigkeit der Zielfunktion, die der langfristigen Gewinnmaximierung entspricht, erfordert dabei - wie erwähnt - die sofortige Reinvestition finanzieller Überschüsse einer Periode entweder in Form von Sachinvestitionen oder Finanzinvestitionen mit einer Laufzeit von einer Periode.

---

[1] Obwohl am Ende des Planungszeitraums das Betriebsvermögen in Form von finanziellen Mitteln vorliegt, bedeutet dies nicht eine Liquidation der Unternehmung. Eine Auflösung am Ende des Planungszeitraumes und die Verteilung der überschüssigen Finanzierungsmittel kommt nur dann in Frage, wenn die Länge des Planungszeitraumes mit der Lebensdauer der Unternehmung übereinstimmt. Da eine Planung jedoch aus praktischen Erwägungen im allgemeinen zeitlich begrenzt ist und die Lebensdauer der Unternehmung als fast unendlich unterstellt wird, bedeutet das Ende des Planungszeitraumes lediglich den gleichzeitigen Abschluß des betrachteten Investitions- und Finanzierungsprogramms. So betrachtet wird am Ende des Planungszeitraumes festgestellt, welches die finanziellen und somit auch erfolgswirksamen Auswirkungen des optimalen Investitions- und Finanzierungsprogramms sind.

[2] Vgl. auch KOCH, H.: Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O., S. 58 ff.

Sind periodisch konstante Entnahmen[1] in Höhe der Beträge D_t (t = 1,...,T) zu berücksichtigen, die bei einer Aktiengesellschaft als Dividendenbeitrag des Investitions- und Finanzbereichs angesehen werden können, wird dadurch zwar die Liquidität einer jeden Periode beeinträchtigt; die Struktur der Zielfunktion und die optimale qualitative Zusammensetzung des Investitions- und Finanzierungsprogramms bleiben jedoch unberührt.

31222 Aufstellung der Zielfunktion

Unter Berücksichtigung der genannten Prämissen ergibt sich als vorläufige Zielfunktion

(312221)

$$Z = \sum_{j=1}^{\bar{j}} \sum_{t=1}^{T-1} z_{Tj\tau} \cdot x_{j\tau} + \sum_{f=1}^{\bar{f}} \sum_{t=1}^{T-1} v_{Tf\tau} \cdot y_{f\tau} + (1+z_{H,T-1}) k_{T-1} - D_T = \max!$$

Abschlußzahlung (letzte Zahlung) in der Periode T der Investitionsaktivitäten $x_{j\tau}$

Abschlußzahlung (letzte Zahlung) in der Periode T für die Finanzierungsaktivitäten $y_{f\tau}$

Einzahlung aus der in der Periode T-1 getätigten Finanzanlage k_{T-1}

Entnahme konstante D_T in der Periode T

---

[1] Eine jährlich konstante Entnahme kann sich dann als unzweckmäßig erweisen, wenn das Endvermögen erst durch die Lösung des Modells fixiert wird und das Verhältnis der jährlichen Entnahme zum Endvermögen ungünstig wirkt, so daß ein Verzicht auf ein größeres Endvermögen zugunsten größerer Entnahmen in den einzelnen Perioden empfehlenswert wäre. Vgl. LAUX, H., FRANKE, G.: Der Erfolg im betriebswirtschaftlichen Entscheidungsmodell. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft. Jg. 4o (197o), S. 41. Diese Einschränkung kann durch die Einfügung einer Restriktion beseitigt werden, die bewirkt, daß sich die Entnahmen E_t in der Periode t am Vermögen V_t der Periode t orientieren.

$E_t = \alpha_t \cdot V_t$ für t = 1,...,T

α_t = %-Satz, der vom Unternehmer festzusetzen ist.

D_T = Entnahme in der Periode T

k_{T-1} = Finanzanlage, die in der Periode T-1 für eine Periode getätigt wird.

$x_{j\tau}$ = Anzahl der Investitionsobjekte j, die zum Zeitpunkt τ angeschafft und eingesetzt werden.

$v_{Tf\tau}$ = Einzahlungsüberschuß (Abschlußzahlung)[1] einer Einheit der zum Zeitpunkt τ eingesetzten Finanzierungsaktivität f in der Periode T.

$y_{f\tau}$ = Finanzierungsniveau der Finanzierungsvariablen f, die zum Zeitpunkt τ in Anspruch genommen wird.

$z_{H,T-1}$ = Habenzinssatz für eine Einheit der Finanzanlage k, die zum Zeitpunkt T-1 getätigt wird.

$z_{Tj\tau}$ = Einzahlungsüberschuß (Abschlußzahlung) des zum Zeitpunkt τ angeschafften und eingesetzten Investitionsobjektes j in der Periode T.

Unter Vernachlässigung der fixen Entnahme D_T, die ohne Einfluß auf die optimale Zusammensetzung des simultanen Investitions- und Finanzierungsprogramms ist, reduziert sich die Zielfunktion zu folgender Form:

(312222)

$$Z=\sum_{j=1}^{\bar{j}}\sum_{\tau=1}^{T-1} z_{Tj\tau}\cdot x_{j\tau}+\sum_{f=1}^{\bar{f}}\sum_{\tau=1}^{T-1} v_{Tf\tau}\cdot y_{f\tau}+(1+z_{H,T-1})k_{T-1} = \max!$$

---

[1] Ist der Wert der Abschlußzahlung kleiner als Null, erhält $v_{Tf\tau}$ ein negatives Vorzeichen.

Der Index T der Zielfunktionskoeffizienten soll noch einmal verdeutlichen, daß die betrachteten Zahlungen als Abschlußzahlungen in der letzten Periode T des Planungszeitraumes $\bar{T}$ anfallen.

oder

(312222a)

$$Z=\sum_{\tau=1}^{T-1}\left(\sum_{j=1}^{\bar{j}} z_{Tj\tau}\cdot x_{j\tau}+\sum_{f=1}^{\bar{f}} v_{Tf\tau}\cdot y_{f\tau}\right)+(1+z_{H,T-1})k_{T-1} = \max!$$

Der Zielwert Z zeigt den langfristigen Gewinn, der sich am Ende des Planungszeitraumes, also nach dem Zeitpunkt T, durch das fixierte Investitions- und Finanzierungsprogramm ergibt.

Verursachen die Modellvariablen Zahlungsströme, die über den Planungshorizont hinausgehen, so erfolgt die Bewertung der nicht abgeschlossenen Investitions- und Finanzierungsvorhaben im Planungshorizont durch Abzinsung der über T hinausgehenden Zahlungsströme mit einem Kalkulationszinsfuß[1] p auf das Ende des Planungszeitraumes $\bar{T}$; auf diese Weise kann u.a. auch ein am Ende des Planungszeitraumes noch vorhandener positiver oder negativer Nutzungswert als vermögenswirksam in die Betrachtung mit einbezogen werden[2].

$$z^{+}_{j\tau} = \sum_{t=1}^{T-1}\sum_{t=T+1}^{T^{+}} z_{tj\tau}\cdot q^{(T-t)} \qquad \forall\, j = 1,\ldots,\bar{j}$$

$$v^{+}_{f\tau} = \sum_{t=1}^{T-1}\sum_{t=T+1}^{T^{+}} v_{tf\tau}\cdot q^{(T-t)} \qquad \forall\, f = 1,\ldots,\bar{f}$$

---

[1] Zur Problematik der Festsetzung des Kalkulationszinsfußes vgl. Kapitel 2813.

[2] Vgl. auch SEELBACH, H.: Planungsmodelle in der Investitionsrechnung, a.a.O., S. 38.

$z^{+}_{j\tau}$ = auf das Ende des Planungszeitraumes T abgezinster Einzahlungsüberschuß, der durch Zahlungen nach Ende des Planungszeitraumes $\bar{T}$ ($t=\bar{T}+1,\ldots,T^{+}$) für das in der Periode τ angeschaffte Investitionsobjekt j entsteht.

T^{+} = Zeitpunkt ($T^{+} > T$), zu dem die letzte Zahlung eingeht.
Es wird aus Vereinfachungsgründen angenommen, daß die letzten Zahlungen aller Variablen in T^{+} anfallen. In der Realität können jedoch die letzten Zahlungen für die verschiedenen Variablen zu unterschiedlichen Zeitpunkten anfallen, so daß $T^{+} = T^{+}(j)$, $T^{+} = T^{+}(f)$ und $T^{+} = T^{+}(\tau)$. Durch die Vereinfachung bleibt die Struktur des Modells jedoch unberührt.

$v^{+}_{f\tau}$ = auf das Ende des Planungszeitraumes $\bar{T}$ abgezinster Einzahlungsüberschuß, der durch Zahlungen nach Ende des Planungszeitraumes $\bar{T}$ ($t=\bar{T}+1,\ldots,T^{+}$) für die in der Periode τ in Anspruch genommene Finanzierungsmaßnahme f entsteht.

$v^{+}_{f\tau} > 0$, Einzahlungsüberschuß

$v^{+}_{f\tau} < 0$, Auszahlungsüberschuß

Unter Berücksichtigung der über T hinausgehenden Zahlungen verändert sich die Zielfunktion[1].

(312223)

$$\bar{Z} = \sum_{\tau=1}^{T-1}\left(\sum_{j=1}^{\bar{j}}(z_{Tj\tau}+z^{+}_{j\tau})x_{j\tau} + \sum_{f=1}^{\bar{f}}(v_{Tf\tau}+v^{+}_{f\tau})y_{f\tau}\right)+(1+z_{H,T-1})k_{T-1} = \max!$$

---

[1] Bei unseren späteren Betrachtungen soll die Berücksichtigung der diskontierten Zahlungsströme vernachlässigt bzw. approximativ erfaßt werden.
Die dadurch nicht veränderte Problemstruktur gestattet auf diese Weise eine übersichtlichere Darstellung.

313 Nebenbedingungen

3131 Liquiditätsbedingungen

Die Bedingung der Aufrechterhaltung des finanziellen Gleichgewichts[1] beinhaltet die Beachtung der Liquidität in jedem Zeitpunkt unter Berücksichtigung der vorgenommenen Investitionen und der zur Verfügung stehenden Finanzierungsmaßnahmen.

Unter Liquidität[2] soll hier die Eigenschaft von Wirtschaftssubjekten verstanden werden, jederzeit die fälligen Zahlungsverpflichtungen erfüllen zu können.

Um den fälligen Zahlungsverpflichtungen nachkommen zu können, muß in jedem Zeitpunkt t "eine Abstimmung zwischen Kapitalbedarf und Kapitaldeckung vorgenommen werden"[3], so daß stets die kumulierten Einzahlungen nicht kleiner als die kumulierten Auszahlungen sind[4].

---

1 Vgl. GUTENBERG, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre. Bd. 1: Die Produktion, a.a.O., S. 446 f. Vgl. LÖCKE, W.: Finanzplanung und Finanzkontrolle in der Industrie, a.a.O., S. 43. LÖCKE, W.: Die Liquidität im Entscheidungsmodell, a.a.O., S. 322-345, bes. S. 325.

2 Vgl. Art. Liquidität (W. STÖTZEL). In: Handwörterbuch der Sozialwissenschaften. Stuttgart-Tübingen-Göttingen, Bd. 6 (1959), S. 622. GRÜNEWÄLDER, O.: Mittel der Liquiditätskontrolle in industriellen Unternehmungen. Diss. Mannheim 1965, S. 1 ff.
Eine Diskussion der Liquiditätsbegriffe sowie der rechnerischen Erfassung der Liquidität findet man bei DEPPE, H.-D.: Betriebswirtschaftliche Grundlagen der Geldwirtschaft, Bd. 1: Einführung und Zahlungsverkehr, Stuttgart 1973, bes. S. 69 ff.

3 HABERSTOCK, L.: Zur Integrierung der Ertragsbesteuerung in die simultane Produktions-, Investitions- und Finanzierungsplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 42.

4 Vgl. auch KOSIOL, E.: Finanzplanung und Liquidität. In: Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung. N.F., Jg. 7 (1955), S. 251-271, hier S. 264.

Der Ergebnisbereich der Eigenschaft Liquidität kann lediglich aus zwei Werten bestehen: erfüllt oder nicht erfüllt; d.h. eine Teilerfüllung der Eigenschaft ist ausgeschlossen.

Im Gegensatz zu den Prinzipien der Gewinn- und Rentabilitätsmaximierung wird für die Liquidität keine Maximalbedingung aufgestellt - etwa in der Form, eine möglichst große Zahlungsmittelreserve anzustreben[1]-, sondern es gilt lediglich die Forderung, die jederzeitige Zahlungsfähigkeit zu erhalten.

Da dauernde Zahlungsunfähigkeit eines Unternehmens zum Ausscheiden aus dem Wirtschaftsprozeß zwingt[2], muß bei jeder Entscheidung der Unternehmung die Erhaltung des finanziellen Gleichgewichts mit berücksichtigt werden[3].

Dieser Forderung wird in einem mathematischen Entscheidungsmodell durch die Formulierung entsprechender Nebenbedingungen[4] nachgekommen.

---

1 Die Verfolgung eines derartigen Zieles würde der Realisierung der aufgestellten Zielfunktion widersprechen.

2 Vgl. Konkursordnung v. 1o. Febr. 1877 (RGBl. 351 i.d.F. der Bek. v. 2o. Mai 1898, RGBl 612) § 1o2, abgedruckt in: KLAUSS, H.K.: Konkursordnung. Ludwigshafen am Rhein 1963, hier S. 42. Vgl. WITTE, E.: Die Liquiditätspolitik der Unternehmung, a.a.O.,Vorwort.

3 Vgl. WITTE, E.: Die Liquiditätspolitik der Unternehmung, a.a.O., S. 19. Wird das finanzielle Gleichgewicht aufrecht erhalten, so werden dem Betrieb bei der Realisation seiner Zielfunktion "vom finanzwirtschaftlichen Bereich keine Hindernisse entgegenstehen". /VORMBAUM, H.: Finanzierung der Betriebe, a.a.O., S. 327. Diese Feststellung besagt jedoch nicht, daß der finanzielle Bereich auch nicht zum Engpaßbereich der betrieblichen Planung werden kann.

4 Vgl. Art. Liquidität (W. STÖTZEL), a.a.O., S. 625.

Durch die Unterstellung sicherer Erwartungen werden keine Finanzreserven für unerwartete finanzielle Transaktionen gehalten[1], so daß lediglich zu verhindern ist, daß die Summe der kumulativen Einzahlungen kleiner als die Summe der kumulativen Auszahlungen wird[2]. Das bedeutet, daß die Restriktionen zur Aufrechterhaltung des finanziellen Gleichgewichts als Gleichungen zu formulieren sind.

Zunächst sollen alle Ein- und Auszahlungsströme entwickelt werden, die sich in dem betrachteten Planungszeitraum aufgrund der Investitions- und Finanzierungsaktivitäten ergeben können.

Daraus lassen sich die Liquiditätsbedingungen für die einzelnen Perioden des Planungszeitraumes ableiten.

Auf der Einzahlungsseite können nach der Herkunftsart der Zahlungsströme folgende Positionen aufgeführt werden:

(E 1) Kumulierte Einzahlungen bis zur Periode T, die durch in den Vorperioden τ durchgeführte Investitionen j verursacht sind.
Die kumulierten Einzahlungen für das im Zeitpunkt τ beschaffte Investitionsobjekt j ergeben sich zu

$$\sum_{t=\tau+1}^{T} e_{tj\tau}$$

Die gesamten kumulierten Einzahlungen betragen:

---

[1] Vgl. LAUX, H.: Kapitalkosten und Ertragssteuern. Köln-Berlin-Bonn-München 1969, S. 39.

[2] Vgl. HAX, H.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 435. Zu berücksichtigen ist noch der zu Beginn des Planungszeitraumes vorhandene Geldbestand.

$$\sum_{t=\tau+1}^{T} \sum_{j=1}^{\bar{j}} \sum_{\tau=1}^{T-1} e_{tj\tau} \cdot x_{j\tau}$$

$e_{tj\tau}$ = Einzahlung[1] in der Periode t für das in der Periode τ investierte Objekt j. Die erste Einzahlung kann in der Periode $t = \tau + 1$ erfolgen.

$x_{j\tau}$ = Anzahl der zum Zeitpunkt τ durchgeführten Investitionen der Art j

τ = Anlagezeitpunkt

(E 2) Einzahlungen aus in τ aufgenommenen Finanzierungsbeträgen der Finanzierungsarten f unter Abzug eines eventuell erhobenen Disagios[2] $\delta_{f\tau}(\tau = t)$

$$\sum_{f=1}^{\bar{f}} \sum_{\tau=1}^{T-1} (1 - \delta_{f\tau}) \; y_{f\tau} ; \qquad \delta_{f\tau} \begin{cases} > 0 \text{ Disagio} \\ < 0 \text{ Agio} \end{cases}$$

$\delta_{f\tau}$ = Disagio oder Agio der in der Periode τ aufgenommenen Finanzierungsart f in Prozent des Nennbetrages. Der Prozentsatz wird als Dezimalwert ausgedrückt (z.B. 1o % = o,1).

Da Einzahlungen aus in τ aufgenommenen Finanzierungsbeträgen dem Betrieb nur einmal in der gleichen Periode t zufließen, ist hier $\tau = t$, so daß in diesem Fall τ durch t ersetzt werden kann und sich die Summe der Einzahlungen aus den Finanzierungsmaßnahmen auch als

$$\sum_{f=1}^{\bar{f}} \sum_{t=1}^{T-1} (1 - \delta_{ft}) \; y_{ft}$$

ausdrücken läßt.

---

[1] Es müssen nicht alle $e_{tj\tau} > 0$ sein; so sind z.B. für alle Perioden $t = \tau$ die $e_{tj\tau} = 0$.

[2] Die Berechnung eines Disagios ist bei der Vergabe von Darlehen üblich. Der Auszahlungskurs an den Kreditnehmer kann um 1-1o % und mehr unter dem Nominalbetrag liegen.

(E 3) Einzahlungen aus den in der Vorperiode für eine Periode angelegten Finanzmittelüberschüsse k_{t-1}, die mit dem Haben-Zinssatz $z_{H,t-1}$ verzinst werden.

$(1+z_{H,t-1})\ k_{t-1}$

bzw. $(1+z_{H,\tau})\ k_{\tau}$; $\tau = t-1$

(E 4) Bestand an finanziellen Mitteln zu Beginn des Planungszeitraumes.

L_1

Die Auszahlungsseite läßt sich entsprechend nach der Herkunftsart der Zahlungsströme aufgliedern:

(A 1) Kumulierte Auszahlungen für die Anschaffung der Investitionen j, die in der Periode τ getätigt wurden.

Unter Berücksichtigung aller Investitionen und aller Perioden innerhalb des Planungszeitraumes gelangt man zu folgenden Auszahlungen:

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} \sum_{\tau=1}^{T-1} a_{j\tau} \cdot x_{j\tau}$$

$a_{j\tau}$ = Anschaffungsauszahlung im Zeitpunkt $\tau = t$ für das in der Periode τ investierte Objekt j.

Da der Anschaffungszeitpunkt τ hier mit der betrachteten Periode t identisch ist, kann für obigen Ausdruck auch

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} \sum_{t=1}^{T-1} a_{jt} \cdot x_{jt}$$

geschrieben werden.

(A 2) Kumulierte Auszahlungen für Tilgungsbeträge der in vergangenen Perioden aufgenommenen Finanzierungsbeträge

$$\sum_{f=1}^{\bar{f}} \sum_{\tau=1}^{T-1} (T-\tau)\, r_{f\tau} \cdot y_{f\tau}$$

$r_{f\tau}$ = Tilgungskoeffizient pro Periode für die Tilgung der in der Periode τ aufgenommenen Finanzierungsaktivität f; $0 < r_{f\tau} \leq 1$.

Die Tilgung beginnt in $t = \tau + 1$.
Es wird unterstellt, daß der Tilgungskoeffizient $r_{f\tau}$ für die einzelnen Perioden t konstant[1] ist und sich stets auf den Ursprungsbetrag $y_{f\tau}$ bezieht.

(A 3) Kumulierte Auszahlungen für Zinsleistungen der in vergangenen Perioden aufgenommenen Finanzierungsbeträge.

$u_{tf\tau}$ = Zinssatz bzw. Zinskoeffizient in der Periode t für die in der Periode τ aufgenommene Einheit der Finanzierungsart f. ($0 \leq u_{tf\tau} < 1$). Die Zinszahlungen beginnen in $t = \tau + 1$, d.h. die Zinszahlungen erfolgen rückwirkend.

Der Zinssatz $u_{tf\tau}$ wird jeweils auf den Restbetrag des in Anspruch genommenen Finanzierungsbetrages bezogen, so daß lediglich der jeweils effektive Finanzierungsbetrag verzinst wird.

---

[1] Dadurch werden außerplanmäßige Tilgungen ausgeschlossen. Die Verwendung variabler Tilgungskoeffizienten in den einzelnen Perioden t wäre ohne weiteres möglich. Es müßte dann das Symbol $r_{tf\tau}$ = Tilgungskoeffizient in der Periode t für die Tilgung der in der Periode τ aufgenommenen Finanzierungsaktivität f eingeführt werden.

Für eine in der Periode t = 1 in Anspruch genommene Finanzierungsmaßnahme ergeben sich z.B. für die folgenden Perioden an Auszahlungen für Zinsleistungen:

t = 1: Auszahlung für Zinsleistungen $u_{1f1} \cdot y_{f1} = 0$
t = 2: Auszahlung für Zinsleistungen $u_{2f1} \cdot y_{f1}$
t = 3: Auszahlung für Zinsleistungen $(1-r_{f1})\, u_{3f1} \cdot y_{f1}$
t = 4: Auszahlung für Zinsleistungen $(1-2r_{f1})\, u_{4f1} \cdot y_{f1}$

usw.

Wird über die einzelnen Finanzierungsarten f, die Zeitpunkte der Inanspruchnahme τ der einzelnen Maßnahmen sowie über die Laufzeit der Finanzierungsmaßnahmen summiert, so erhält man als gesamte Auszahlungen für Zinsleistungen im Planungszeitraum

$$\sum_{t=\tau+1}^{T} \sum_{f=1}^{\bar{f}} \sum_{\tau=1}^{T-1} \left[\, 1-(t-\tau-1)\, r_{f\tau} \,\right] u_{tf\tau} \cdot y_{f\tau}$$

Die Auszahlungen für Tilgungsbeträge und Zinsleistungen für die Finanzierungsart f, die zum Zeitpunkt τ in Anspruch genommen wurde, lassen sich für die Periode t zum sogenannten Kapitaldienst in folgender Form zusammenfassen:

$$\underbrace{\left\{ r_{f\tau} + \left[1-(t-\tau-1)r_{f\tau}\right] u_{tf\tau} \right\} y_{f\tau}}_{\text{Kapitaldienst}} \qquad \begin{matrix} \forall f = 1,\ldots,\bar{f} \\ \tau \leq t-1 \end{matrix}$$

Kapitaldienst

pro Einheit für die Periode t der in der Periode τ in Anspruch genommenen Finanzierungsaktivität f.

Wird über alle f, τ und t summiert, indem die Auszahlungen von (A 2) und (A 3) zum Kapitaldienst zusammengefaßt werden, erhält man als Summe aller Kapitaldienstbeträge die folgenden kumulierten Auszahlungen für den Kapitaldienst der in Anspruch genommenen Finanzierungsaktivitäten.

$$\sum_{t=\tau+1}^{T} \sum_{f=1}^{\bar{f}} \sum_{\tau=1}^{T-1} \left\{ (T-\tau) r_{f\tau} + \left[1-(t-\tau-1) r_{f\tau} \right] u_{tf\tau} \right\} y_{f\tau}$$

(A 4) Auszahlungen zur verzinslichen Anlage der überschüssigen Finanzierungsmittel k_τ für eine Periode ($\tau = t$).

(A 5) Auszahlungen, die für eine konstante Entnahme D_t in der Periode t erfolgen ($t=\tau$).

Die kumulierten Auszahlungen bis zum Zeitpunkt T-1 betragen

$$\sum_{t=1}^{T-1} D_t .$$

Wird in der letzten Periode T auch noch eine konstante Entnahme getätigt, ergeben sich als kumulierte Auszahlung für konstante Entnahmen

$$\sum_{t=1}^{T} D_t .$$

Damit sind alle Auszahlungsströme erfaßt, so daß die Bedingungen zur Aufrechterhaltung des finanziellen Gleichgewichts für jede Periode erstellt werden können.

Bei der Unterstellung, daß zu Beginn des Planungszeitraumes (t=1) ein Bestand an liquiden Mitteln L_1 vorhanden

ist, bleibt das finanzielle Gleichgewicht dann erhalten, wenn die Summe aus dem Bestand an liquiden Mitteln und den Einzahlungen in dieser Periode gleich der Summe der Auszahlungen ist[1].

Dieser Forderung wird in den folgenden Liquiditätsbedingungen nachgekommen, indem die einzelnen Einzahlungs- und Auszahlungsströme der betrachteten Periode gegenübergestellt werden.

Liquiditätsbedingung für die Periode t=1

Die Einzahlungen aus den Positionen (E 1) und (E 3) haben den Wert Null; ebenso die Auszahlungen der Positionen (A 2) und (A 3).

Somit ergibt sich als Liquiditätsbedingung

(31311)

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{\bar{j}} a_{j1}\, x_{j1} + k_1 + D_1}_{\text{Auszahlungen}} - \underbrace{\left(\sum_{f=1}^{\bar{f}} (1 - \delta_{f1})\, y_{f1} + L_1 \right)}_{\text{Einzahlungen}} = 0$$

Werden die konstanten Glieder auf die rechte Seite übertragen, erhält man eine Gleichung, die beispielsweise direkt für das Simplextableau des Modells zur Lösung des Problems verwendet werden kann:

---

[1] Da Reserven an liquiden Mitteln wegen der deterministischen Struktur des Modells überflüssig sind, haben die Liquiditätsbedingungen die Form von Gleichungen.

(31311a)

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} a_{j1} \cdot x_{j1} + k_1 - \sum_{f=1}^{\bar{f}} (1-\delta_{f1})\, y_{f1} = L_1 - D_1$$

Entsprechend wird für die Periode 2 verfahren.

Liquiditätsbedingung für die Periode t = 2

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} a_{j2} \cdot x_{j2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{f=1}^{\bar{f}} r_{f1} \cdot y_{f1} \\ \sum_{f=1}^{\bar{f}} u_{2f1} \cdot y_{f1} \end{array}\right\} \quad \sum_{f=1}^{\bar{f}} (r_{f1} + u_{2f1})\, y_{f1}$$

$$k_2$$

$$D_2$$

} Auszahlungen

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} e_{2j1} \cdot x_{j1}$$

$$(1+z_{H,1})\, k_1$$

$$\sum_{f=1}^{\bar{f}} (1-\delta_{f2})\, y_{f2}$$

} Einzahlungen

(31312)

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} a_{j2}\cdot x_{j2}+\sum_{f=1}^{\bar{f}} (r_{f1}+u_{2f1})y_{f1}-\sum_{j=1}^{\bar{j}} e_{2j1}\cdot x_{j1}-\sum_{f=1}^{\bar{f}} (1-\delta_{f2})y_{f2}-$$

$$-(1+z_{H,1})k_1+k_2 = -D_2$$

Entsprechend lassen sich die Liquiditätsbedingungen für die Perioden t = 2,...,T-2 in allgemeiner Form aufstellen.

Liquiditätsbedingung für die Periode t (t = 2,...,T-2)

(31313)

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} a_{jt}\cdot x_{jt}+\sum_{f=1}^{\bar{f}} \sum_{\tau=1}^{t-1} \left\{ r_{f\tau}+ \left[1-(t-\tau-1)r_{f\tau}\right] u_{tf\tau} \right\} y_{f\tau} -$$

$$-\sum_{j=1}^{\bar{j}} \sum_{\tau=1}^{t-1} e_{tj\tau}\cdot x_{j\tau}-\sum_{f=1}^{\bar{f}} (1-\delta_{ft})y_{ft}-(1+z_{H,t-1})k_{t-1}+k_t = -D_t$$

Liquiditätsbedingung für die Periode T-1

(31314)

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} a_{j,T-1}\cdot x_{j,T-1}+\sum_{f=1}^{\bar{f}} \sum_{\tau=1}^{T-2} \left\{ r_{f\tau}+ \left[1-(T-\tau-2)r_{f\tau}\right] u_{T-1,f\tau} \right\} y_{f\tau} -$$

$$-\sum_{j=1}^{\bar{j}} \sum_{\tau=1}^{T-2} e_{T-1,j\tau}\cdot x_{j\tau}-\sum_{f=1}^{\bar{f}} (1-\delta_{f,T-1})y_{f,T-1}-(1+z_{H,T-2})k_{T-2}+$$

$$+ k_{T-1} = -D_{T-1}$$

Die erstmalige Inanspruchnahme neuer Investitions- und Finanzierungsaktivitäten kann spätestens in der Periode t = T-1 erfolgen, da das Modell in der Periode T nur noch Abschlußzahlungen für die Variablen vorsieht, die in die Zielfunktion eingehen.

Liefert der Zielwert Z einen negativen Wert[1], sind die Auszahlungen in der letzten Periode T größer als die Einzahlungen, so daß die betrachtete Unternehmung illiquide wird, was auch in einem negativen Betriebsvermögen bzw. in einem Betriebsverlust zum Ausdruck kommt.

Eine zusätzliche Einfügung einer Liquiditätsbedingung für die Periode T würde bei dem vorliegenden Maximierungsproblem bewirken, daß der optimale Zielwert entweder gleich groß bleibt oder noch kleiner werden würde, so daß die Aufrechterhaltung des finanziellen Gleichgewichts in der Periode T auch durch die zusätzliche Formulierung einer Liquiditätsbedingung nicht zu erreichen wäre.

Die explizite Formulierung der Liquiditätsbedingung würde das Modell in diesem Fall unlösbar machen.

Bei der unterstellten Modellformulierung erübrigt sich die explizite Berücksichtigung einer Liquiditätsbedingung für die Periode T, da ein optimaler Zielwert $Z_{opt} < 0$ automatisch die Illiquidität der letzten Periode zum Ausdruck bringt.

Die Formulierung des Problems kann somit nur dann als möglich und widerspruchsfrei angesehen und einer ökonomisch sinnvollen Lösung zugeführt werden, wenn der optimale Zielwert $Z_{opt} \geq 0$ ist und somit die Liquidität auch in der letzten Periode des Planungszeitraumes gegeben ist.

---

[1] Bei dieser Betrachtungsweise wird von einer konstanten Entnahme D_T in der Periode T abgesehen. Soll jedoch die Entnahme D_T berücksichtigt werden, so ändert sich nichts an den getroffenen Aussagen, da D_T in diesem Fall als konstantes Glied in die Zielfunktion eingeht und den Zielwert mitbestimmt.

3132 Kapazitätsbedingungen

31321 Kapazitätsbedingung für die Investitionsvariablen

Die Installation einer unendlich großen Anzahl von Investitionsobjekten in der Unternehmung wäre eine sinnlose Unterstellung.

Vielmehr ist die Obergrenze für die Anzahl der zu investierenden Objekte j zu den Zeitpunkten τ zu ermitteln.

In einer Nebenbedingung findet diese Restriktion Berücksichtigung.

(313211)

$$x_{j\tau} \leq X_{j\tau} \qquad \begin{matrix}(j = 1,\ldots,\bar{j}) \\ (\tau = 1,\ldots,T-1)\end{matrix}$$

Abhängigkeiten zwischen einzelnen Investitionsobjekten können ebenfalls in Nebenbedingungen berücksichtigt werden[1].

---

[1] So können sich z.B. mehrere Investitionsobjekte gegenseitig ausschließen oder aber auch in der Weise voneinander abhängen, daß die Durchführung eines Investitionsobjektes die gleichzeitige Installation eines anderen Objektes erfordert. Vgl. auch BLOHM, H., LODER, K.: Investition, a.a.O., S. 162.
HAX, H.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung, a.a.O., S. 442 f. Hier werden Abhängigkeiten bei linearen Variablen aufgezeigt. Eine explizit formulierte Erfassung derartiger Beziehungen soll in dem beschriebenen Modell unterbleiben.

31322 Kapazitätsbedingung für die Finanzierungsvariablen

Durch die Unterstellung eines unvollkommenen und beschränkten Kapitalmarktes können die Finanzierungsvariablen nicht beliebig große Werte annehmen, sondern es werden Obergrenzen für die Aufnahme von Finanzierungsbeträgen fixiert.

Zur Bestimmung von Höchstbeträgen für die einzelnen Finanzierungsmaßnahmen werden die unterschiedlichsten Finanzierungsregeln herangezogen, die sich meist in Form von Bilanzkennzahlen[1], wie z.B. Verschuldungskennzahlen[2], ausdrücken lassen.

Da bei der Berechnung von Finanzierungsregeln im allgemeinen statische Bilanzgrößen zugrunde liegen, muß die Fixierung einer Fremdkapitalobergrenze auf dieser Basis mit Bedenken angesehen werden[3].

Die Vergabe von langfristigen Fremdkapitalien seitens des Bankensektors richtet sich in der Praxis in der Regel nach dem Image und der Bonität des Kreditnehmers.

Diese Einflußgrößen lassen sich quantitativ schwer erfassen, so daß Finanzierungsobergrenzen meist zwischen dem Geldgeber und Geldnehmer ausgehandelt werden.

---

[1] Zur Diskussion von Finanzierungsregeln und Bilanzkennzahlen vgl. Fußnote 1 auf S.82.

[2] JANBERG spricht von einem Verschuldungskoeffizienten. Vgl. JANBERG, H.: Finanzierung und Finanzpolitik, a.a.O., S. 53.

[3] Zur Problematik der Verwendung von Finanzierungskennzahlen als Mittel zur Aufrechterhaltung der Liquidität vgl. auch ZWEHL, W. v.: Untersuchung zur Erstellung einer Planbilanz als Ergänzung des Jahresabschlusses. Diss. Göttingen 1968, S. 38 ff.

Die sich daraus ergebende Konsequenz für unser Modell liegt in der Festsetzung der maximal verfügbaren finanziellen Potentiale (Y_{ft}) der Finanzierungsarten f in den einzelnen Perioden[1].

So dürfen die effektiv in Anspruch genommenen Finanzierungsmittel der Finanzierungsart f abzüglich der bereits geleisteten Tilgungsbeträge die fest fixierte Obergrenze der betreffenden Finanzierungsart in der betrachteten Periode t nicht überschreiten.

$\sum_{\tau=1}^{t} y_{f\tau}$ = in Anspruch genommene Finanzierungsmittel der Finanzierungsart f bis zur Periode t.

$\sum_{\tau=1}^{t-1} (t-\tau) r_{f\tau} \cdot y_{f\tau}$ = geleistete Tilgungsbeträge für die in der Periode τ in Anspruch genommenen Finanzierungsaktivitäten der Finanzierungsart f bis zur Periode t.

Als Finanzierungsrestriktion ergibt sich somit für jede Periode t

(313221)

$$\sum_{\tau=1}^{t} y_{f\tau} - \sum_{\tau=1}^{t-1} (t-\tau) r_{f\tau} \cdot y_{f\tau} \leqq Y_{ft} \qquad \begin{matrix} f = 1,\ldots,\bar{f} \\ t = 1,\ldots,T-1 \end{matrix}$$

Da für $\tau = t$
der Ausdruck $(t-\tau)\, r_{f\tau} \cdot y_{f\tau} = 0$ wird,
kann (313221) vereinfacht werden zu

---

[1] Ist Y_{ft} in den einzelnen Perioden konstant, so kann der Index t wegfallen.

(313221a)

$$\sum_{\tau=1}^{t} \left[1-(t-\tau)\, r_{f\tau} \right] y_{f\tau} \leqq y_{ft} \qquad \begin{matrix} f = 1,\ldots,\bar{f} \\ t = 1,\ldots,T-1 \end{matrix}$$

31323 Nichtnegativitätsbedingung für die Variablen

Bei der Berechnung eines mathematischen Modells werden die Variablen in den meisten Fällen "frei" vorgegeben, d.h. sie können theoretisch alle Werte annehmen.

Bei der Diskussion eines ökonomischen Modells wie des vorliegenden Investitions- und Finanzierungsmodells wird eine Betrachtung nur sinnvoll, wenn man von positiven Variablen ausgeht.

(313231)

$$x_{j\tau},\ y_{f\tau},\ k_{\tau} \geqq 0 \qquad \begin{matrix} j = 1,\ldots,\bar{j} \\ f = 1,\ldots,\bar{f} \\ \tau = 1,\ldots,T-1 \end{matrix}$$

Somit ist das Modell vollständig beschrieben.

32 Zusammenstellung der Modellelemente

Die Zielfunktion und die einzelnen Restriktionen sollen im folgenden zusammengefaßt dargestellt werden.

Zielfunktion:

(312222a)

$$Z = \sum_{j=1}^{\bar{j}} \sum_{\tau=1}^{T-1} z_{Tj\tau} \cdot x_{j\tau} + \sum_{f=1}^{\bar{f}} \sum_{\tau=1}^{T-1} v_{Tf\tau} \cdot y_{f\tau} + (1+z_{H,T-1}) k_{T-1} = \max!$$

Nebenbedingungen

für t = 1 Liquiditätsbedingungen

(31311a)

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} a_{j1} \cdot x_{j1} + k_1 - \sum_{f=1}^{\bar{f}} (1-\delta_{f1})\, y_{f1} = L_1 - D_1$$

für t = 2,...,T-2

(31313)

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} a_{jt} \cdot x_{jt} + \sum_{f=1}^{\bar{f}} \sum_{\tau=1}^{t-1} \left\{ r_{f\tau} + \left[1-(t-\tau-1)r_{f\tau}\right] u_{tf\tau} \right\} y_{f\tau} -$$

$$- \sum_{j=1}^{\bar{j}} \sum_{\tau=1}^{t-1} e_{tj\tau} \cdot x_{j\tau} - \sum_{f=1}^{\bar{f}} (1-\delta_{ft}) y_{ft} - (1+z_{H,t-1}) k_{t-1} + k_t = -D_t$$

für t = T-1

(31314)

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} a_{j,T-1} \cdot x_{j,T-1} + \sum_{f=1}^{\bar{f}} \sum_{\tau=1}^{T-2} \left\{ r_{f\tau} + \left[1-(T-\tau-2)r_{f\tau}\right] u_{tf\tau} \right\} y_{f\tau} -$$

$$- \sum_{j=1}^{\bar{j}} \sum_{\tau=1}^{T-2} e_{T-1,j\tau} \cdot x_{j\tau} - \sum_{f=1}^{\bar{f}} (1-\delta_{f,T-1}) y_{f,T-1} - (1+z_{H,T-2}) k_{T-2} + k_{T-1}$$

$$= -D_{T-1}$$

(313211) Kapazitätsbedingung für Investitionsvariablen

$$x_{j\tau} \leqq X_{j\tau} \qquad \begin{matrix} j = 1,\ldots,\bar{j} \\ \tau = 1,\ldots,T-1 \end{matrix}$$

(313221a) Kapazitätsbedingung für Finanzierungsvariablen

$$\sum_{\tau=1}^{t} \left[1-(t-\tau)r_{f\tau}\right] y_{f\tau} \leqq Y_{ft} \qquad \begin{matrix} f = 1,\ldots,\bar{f} \\ t = 1,\ldots,T-1 \end{matrix}$$

(313231) Nichtnegativitätsbedingung für die Variablen

$$x_{j\tau},\ y_{f\tau},\ k_{\tau} \geqq o \qquad \begin{matrix} j = 1,\ldots,\bar{j} \\ f = 1,\ldots,\bar{f} \\ \tau = 1,\ldots,T-1 \end{matrix}$$

Symbolverzeichnis für das Modell

$a_{j\tau}$ = Anschaffungsauszahlung im Zeitpunkt τ für das in $\tau = t$ angeschaffte und eingesetzte Investitionsobjekt j

δ_f = Agio bzw. Disagio der Finanzierungsart f für die in der Periode $t=\tau$ aufgenommenen Finanzierungsbeträge in Prozent des Nennbetrages. Der Prozentsatz wird als Dezimalwert ausgedrückt.

D_T = Entnahme in der Periode T

$e_{tj\tau}$ = Einzahlung in der Periode t für das in der Periode τ investierte Objekt j

k_τ = Finanzanlage, die in der Periode τ für eine Periode angelegt wird

p = Kalkulationszinsfuß

q = $1+\frac{p}{100}$

$r_{f\tau}$ = Tilgungskoeffizient pro Periode für die Tilgung der in der Periode τ aufgenommenen Finanzierungsaktivität f
$0 < r_{f\tau} \leqq 1$

t = Periode des Planungszeitraumes bzw. des Zahlungszeitraumes

τ = Zeitpunkt der Inanspruchnahme der Aktivität

T = letzte Periode des Planungszeitraumes

T^+ = Zeitpunkt ($T^+ > T$), zu dem die letzte Zahlung eingeht

$u_{tf\tau}$ = Zinssatz bzw. Zinskoeffizient in der Periode t der in der Periode τ aufgenommenen Finanzierungsaktivität f
$0 < u_{tf\tau} \leqq 1$

$v_{Tf\tau}$ = Einzahlungsüberschuß in der Periode T der zum Zeitpunkt τ eingesetzten Finanzierungsaktivität f

$v^+_{f\tau}$ = der auf das Ende des Planungszeitraumes $\bar{T}$ abgezinste und durch die in der Periode τ in Anspruch genommene Finanzierungsmaßnahme f verursachte Einzahlungsüberschuß, der durch die Zahlungen nach Ende des Planungszeitraumes $\bar{T}$ ($t=T+1,\ldots,T^+$) entsteht.

$x_{j\tau}$ = Anzahl der zum Zeitpunkt τ durchgeführten Investitionen der Art j

$X_{j\tau}$ = Investitionsobergrenze für die in der Periode τ investierten Objekte j

$y_{f\tau}$ = Höhe der Finanzierungsvariablen f, die zum Zeitpunkt τ in Anspruch genommen wurde

Y_{ft} = Finanzierungsobergrenze für die Finanzierungsart f in der Periode t

$z_{Tj\tau}$ = Einzahlungsüberschuß des zum Zeitpunkt τ angeschafften und eingesetzten Investitionsobjektes j in der letzten Periode T

$z^{+}_{j\tau}$ = der auf das Ende des Planungszeitraumes abgezinste und durch das in der Periode τ angeschaffte Investitionsobjekt j verursachte Zahlungsüberschuß, der durch Zahlungen nach Ende des Planungszeitraumes $\bar{T}$ ($t=T+1,\ldots,\bar{T}$) entsteht.

$z_{H,T-1}$ = Habenzinssatz für die Finanzanlage k im Zeitpunkt T-1

33 Beispiel und Lösung eines finanzwirtschaftlichen Investitionsmodells

Das folgende Beispiel beschreibt eine Unternehmung, die ein optimales simultanes Investitions- und Finanzierungsprogramm plant.

Der Planungszeitraum betrage vier Perioden, wobei in der vierten Periode nur noch Abschlußzahlungen geleistet werden, so daß die Entscheidungszeitpunkte τ bis zur Periode T-1 laufen, die in diesem Fall mit der dritten Periode zusammenfällt.

Investitionsobjekte mit gleichem j zeigen identische Maschinen an, deren Zahlungsströme jedoch bei unterschiedlichem τ möglicherweise differieren, da zwischenzeitliche Preisveränderungen und andere Änderungen der Umweltsituation aufgetreten sein können.

Die Zahlungsvorgänge, die die einzelnen Modellvariablen verursachen und die Daten des Modells können in der folgenden Übersicht zusammengestellt werden[1].

Dabei werden die Modellvariablen $x_{j\tau}$, $y_{f\tau}$ und k_τ durch die in den einzelnen Planungsperioden verursachten Zahlungen gekennzeichnet, die jeweils in der Spalte unter der betreffenden Variablen stehen. So bedeutet z.B. die Spalte unter der Investitionsvariablen x_{11}, daß die Anschaffungsauszahlung in der Periode 1 1o.ooo Geldeinheiten beträgt und in der Periode 2 ein Einzahlungsüberschuß von 8.ooo Geldeinheiten bewirkt wird. In den

---

[1] Anmerkung: Die Auszahlungen erhalten ein positives, die Einzahlungen ein negatives Vorzeichen.

Perioden 3 und 4 können dem Investitionsobjekt Einzahlungsüberschüsse von jeweils weiteren 3.ooo Geldeinheiten zugerechnet werden.

Durch die Kennzeichnung der Investitionsobjekte mit dem Buchstaben j gibt z.B. x_{42} die Variable der Investition 4 an, die erstmals in der Periode 2 dem Betrieb zur Verfügung stehen kann.

Für die übrigen Investitionsvariablen gelten entsprechende Aussagen.

Die Spalten unter den Finanzierungsvariablen beinhalten ebenfalls die den Variablen zugeordneten Zahlungen. Betrachtet man z.B. die Finanzierungsvariable y_{22}, so ist zu erkennen, daß erstmals in der Periode 2 ein Zahlungsvorgang in Form einer Einzahlung ausgelöst werden kann. Da bei Inanspruchnahme dieser Finanzierungsform ein Disagio in Höhe von 5 % zu berücksichtigen ist, beträgt die Einzahlung pro Einheit der Variablen y_{22} lediglich (1-o,o5) Geldeinheiten.
In den beiden folgenden Perioden ist der in Anspruch genommene Kreditbetrag mit 9 % zu verzinsen, wobei in der vierten Periode der Finanzierungsbetrag zusätzlich getilgt wird. Während die Finanzierungsform y_{22} eine einmalige Tilgung aufweist, wird ein in Anspruch genommener Finanzierungsbetrag y_{11} in zwei Perioden zu jeweils 5o % getilgt. Die Beträge der Finanzanlagen k_τ können für eine Periode zur Verfügung gestellt werden, so daß diese mit 5 % verzinsten Beträge (1,o5) in der Periode $\tau+1$ wieder zurückfließen. In der letzten Spalte der Übersicht sind die Werte der Konstanten (D_t, L_1) des Modells aufgeführt. Die konstante Entnahme D_t soll 1o.1oo Geldeinheiten pro Periode betragen; als Bestand an liquiden Mitteln zu Beginn des Planungszeitraumes seien 3o.2oo Geldeinheiten angenommen.
In die Zielfunktion gehen als Koeffizienten der Variablen ihre mit (-1) multiplizierten Zahlungen der vierten Periode ein, die auch als Abschlußzahlungen bezeichnet werden.

		Entscheidungszeitpunkt τ									
		1			2			3			
t		Investitionsvariable $x_{j\tau}$									
	Zahlungen	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{12}	x_{32}	x_{42}	x_{23}	x_{43}		
1		10.000	40.000	80.000							
2		- 8.000	-3.000	-70.000	10.000	80.000	60.000				
3		- 3.000	-5.000	-30.000	-8.000	-70.000	-45.000	80.000	65.000		
4	(Zielfunktionskoeffizienten)(-1)	- 3.000	-35.000	-10.000	-4.000	-35.000	-20.000	-90.000	-66.000		
	max. Aktivitätsniveau d. Investitionsvariablen	5	4	7	4	3	4	4	3		
t		Finanzierungsvariable $y_{f\tau}$									
	Zahlungen	y_{11}	y_{21}	y_{31}	y_{22}	y_{32}		y_{13}	y_{33}		
1		- 1,000	-(1-0,050)	-1,000							
2		0,580	0,090	1,100	-(1-0,050)	-1,000					
3		0,540	0,090		0,090	1,100		- 1,000	- 1,000		
4	(Zielfunktionskoeffizienten)(-1)	0	1,090	0	1,090	0		1,080	1,100		
t		Finanzanlagevariable k_τ									
	Zahlungen	k_1			k_2			k_3		D_t	L_1
1		1,000								-10.100	30.200
2		- 1,050			1,000					-10.100	
3					- 1,050			1,000		-10.100	
4	(Zielfunktionskoeffizienten)(-1)	0			0			- 1,050		-10.100	

Die maximalen Finanzierungsniveaus Y_{ft} der einzelnen Perioden betragen: Y_{11} = 149.500, Y_{21} = 120.000, Y_{31} = 120.000, Y_{12} = 149.500, Y_{22} = 105.000, Y_{32} = 69.700, Y_{13} = 149.500, Y_{23} = 90.000, Y_{33} = 50.000.

Das Optimaltableau[1] liefert folgende Lösungswerte für die Variablen

x_{31} = 4,68875ooo Einheiten
x_{32} = 2,o1253125 "
x_{23} = 3,81799ło9 "
y_{11} = 149.5oo Geldeinheiten
y_{21} = 9o.ooo "
y_{31} = 12o.ooo "
y_{32} = 69.7oo "
y_{13} = 149.5oo "
y_{33} = 5o.ooo "
x_{11} = $x_{21}=x_{12}=x_{42}=x_{43}=y_{22}=k_1=k_2=k_3=0$
Z_{opt} = 146.385,742 Geldeinheiten

Der aus den Investitions- und Finanzierungsaktionen resultierende Zahlungsüberschuß beträgt 146.385,742 Geldeinheiten, der sich bei einer konstanten Entnahme D_T = 1o.1oo Geldeinheiten auf 136.285,742 Geldeinheiten vermindert. Dieser Zahlungsüberschuß ist mit dem Gewinn des Programms gleichzusetzen, da sich bei einer zeitlichen Totalbetrachtung Erfolgs- und Zahlungsgrößen entsprechen.

In der Periode 1 wird das Investitionsobjekt 3 mit 4,68875ooo Einheiten, in der Periode 2 das Investitionsobjekt drei mit zusätzlich 2,o1253125 Einheiten eingesetzt, außerdem kommt in der Periode 3 das Investitionsobjekt 2 mit 3,81799ło9 Einheiten hinzu.

---

[1] Das Beispiel wurde mit Hilfe der revidierten Simplexmethode auf einer IBM 113o gelöst. Zugrunde lag ein FORTRAN-Programm von G. NIEMEYER, das in einigen Punkten von Herrn R. Weiß für die Rechenanlage IBM 113o modifiziert wurde. Vgl. NIEMEYER, G.: Einführung in die lineare Planungsrechnung mit ALGOL- und FORTRAN-Programmen. Berlin 1968, S. 217 f. und NIEMEYER, G.: Investitionsentscheidungen mit Hilfe der elektronischen Datenverarbeitung. Berlin 197o, S. 152 ff. Das stark modifizierte LP-Programm wird später auch als Unterprogramm bei der Programmierung eines Ganzzahligkeitsverfahrens benutzt.

Die Finanzierungsformen der ersten Periode werden mit dem höchst zulässigen Aktivitätsniveau genutzt. In der zweiten Periode, in der die ersten Einzahlungen aus den in Periode 1 getätigten Investitionen x_{31} eingehen, wird nur die Finanzierungsart y_{32} mit ihrem Höchstbetrag von 69.7oo Geldeinheiten beansprucht. Diese Finanzierungsart bietet sich an, da sie auf den Zielwert direkt keinen negativen Einfluß ausübt ($v_{432} = 0$). Durch lohnende Investitionen in der dritten Periode werden auch Finanzierungsmaßnahmen in dieser Periode erforderlich. Dabei schränken die Finanzierungsobergrenzen das Investitionsprogramm ein, d.h. auch in der dritten Periode wird der Finanzierungsbereich der Engpaßsektor für die simultane Investitions- und Finanzplanung.

Eine Finanzanlage k_3 wird in der Periode 3 nicht getätigt, da die finanziellen Mittel in der Periode 3 den Engpaßfaktor darstellen.

Der Investitions- und Finanzplan für die Perioden 1,2,3 läßt sich durch Gegenüberstellung des Kapitalbedarfs und der Kapitaldeckung folgendermaßen aufzeigen:

Investitions- und Finanzplan für die Perioden 1-3

KAPITALBEDARF Maßnahme	x_{31}	D_1
Aktivitätsniveau d.Investitions- u.Finanzierungs-variablen	4,68875000	
Betrag (Geldeinheiten)	375.100	10.100
KAPITALBEDARF (Geldeinheiten)	385.200	
PERIODE 1		

KAPITALDECKUNG Maßnahme	y_{11}	y_{21}	y_{31}	L_1
Aktivitätsniveau d.Investitions- u.Finanzierungs-variablen	149.500	90000	120000	
Betrag (Geldeinheiten)	149.500	85500	120000	30200
KAPITALDECKUNG (Geldeinheiten)	385.200			
PERIODE 1				

KAPITALBEDARF Maßnahme	x_{32}	y_{11}	y_{21}	y_{31}	D_2
Aktivitätsniveau d.Investitions- u.Finanzierungs-variablen	2,0125312	149.500	90.000	120000	
Betrag (Geldeinheiten)	161002,5	86.710	8.100	132000	10100
KAPITALBEDARF (Geldeinheiten)	397.912,5				
PERIODE 2					

KAPITALDECKUNG Maßnahme	x_{31}	y_{32}
Aktivitätsniveau d.Investitions- u.Finanzierungs-variablen	4,68875000	69.700
Betrag (Geldeinheiten)	328.212,5	69.700
KAPITALDECKUNG (Geldeinheiten)	397.912,5	
PERIODE 2		

KAPITALBEDARF Maßnahme	x_{23}	y_{11}	y_{21}	y_{32}	D_3
Aktivitätsniveau d.Investitions- u.Finanzierungs-variablen	3,817996o9	149500	90000	69700	
Betrag (Geldeinheiten)	305439,6872	80730	8100	76670	10100
KAPITALBEDARF (Geldeinheiten)	481.039,6872				
PERIODE 3					

KAPITALDECKUNG Maßnahme	x_{31}	x_{32}	y_{13}	y_{33}
Aktivitätsniveau d.Investitions- u.Finanzierungs-variablen	4,68875000	2,0125312	149500	50000
Betrag (Geldeinheiten)	140662,5	140887,1875	149500	50000
KAPITALDECKUNG (Geldeinheiten)	481.039,6875			
PERIODE 3				

4 Lösung eines mathematisch formulierten finanzwirtschaftlichen Investitionsmodells unter Berücksichtigung von Ganzzahligkeitsbedingungen für die Modellvariablen

41 Notwendigkeit der Berücksichtigung der Ganzzahligkeitsbedingung im finanzwirtschaftlichen Investitionsmodell

Die vorangegangenen Betrachtungen und Berechnungen eines simultan zu planenden linearen Investitions- und Finanzierungsprogramms liefern in der aufgezeigten Form nur sehr unvollkommene Informationen für die unternehmerische Entscheidungsvorbereitung, da in den betrachteten Modellen keine Ganzzahligkeitsbedingungen für die Variablen berücksichtigt werden.

Die Investitionsobjekte lassen sich gewöhnlich nicht teilen. Für die Variablen x_j, welche im Modell die Zahl der Investitionsobjekte j darstellen, werden deswegen zweckmäßigerweise nur ganzzahlige Werte zugelassen (Ganzzahligkeitsbedingung). Ein in unserem Beispiel berechneter Optimalwert von 4,68875ooo Einheiten für die Investitionsvariable x_{11} kann z.B. für die betriebliche Entscheidungsfindung keinen Beitrag liefern, da dieser Wert nicht zu realisieren ist.

Dagegen unterliegen die Finanzierungsvariablen streng genommen nicht der Ganzzahligkeitsrestriktion. Betrachtet man jedoch die wirtschaftliche Realität, kann davon ausgegangen werden, daß viele langfristige Finanzierungsmittelarten nur in großen - und daher auch ganzzahligen - Beträgen gewährt werden; so werden einerseits den Unternehmen z.B. Bankdarlehen zu Investitionszwecken als Millionen- bzw. Tausender-Beträge

zur Verfügung gestellt oder andererseits kann die Beschaffung von Finanzierungsmitteln durch Ausgabe von Schuldverschreibungen - schon aus Gründen der Stückelung - nur in großen runden Beträgen erfolgen, so daß die Ganzzahligkeitsforderung für derartige Finanzierungsarten in der Weise zu erweitern ist, daß lediglich Beträge in einer Stückelung von 1oo oder sogar 1.ooo Geldeinheiten gewährt werden können[1].

Für die Anlage finanzieller Mittel gelten entsprechende Oberlegungen; als Beispiel sei die Anlage von Festgeldern bei Banken angeführt, die in derartigen Fällen nur Geldbeträge in einer bestimmten Größendimension und einer ganzzahligen Stückelung entgegennehmen.

Allein aufgrund der angeführten Einwendungen sind nur die finanzwirtschaftlichen Investitionsmodelle von praktischem Wert, die die Ganzzahligkeitsbedingungen für die einzelnen Hauptvariablen berücksichtigen.

Ob dabei außer den Investitionsvariablen auch die Finanzierungs- und Finanzanlagevariablen der Ganzzahligkeitsrestriktion unterliegen müssen, hängt von der Unternehmung selbst sowie deren Finanzierungsmöglichkeiten und den Gegebenheiten der Finanzanlage ab, so daß sowohl Modelle mit der Ganzzahligkeitsbedingung für alle Hauptvariablen als auch Modelle mit Ganzzahligkeitsbedingungen für nur einen Teil der Hauptvariablen unserer Betrachtung unterliegen müssen.

---

[1] Für den Modellansatz bereitet diese Variante keine Schwierigkeit, da lediglich die Verbrauchskoeffizienten der betreffenden Finanzierungsarten mit einem entsprechenden Multiplikator zu versehen sind.

Durch die zusätzliche Einführung der Ganzzahligkeitsbedingungen ändert sich zwar die Struktur und der Aufbau der finanzwirtschaftlichen Investitionsmodelle kaum, doch erfährt der Lösungsgang eine entscheidende Änderung, da die für kontinuierliche Probleme angewendeten Lösungsverfahren bei der Lösung von Modellen mit diskreten Variablen bis auf wenige Ausnahmen versagen.

Für den Betriebswirt genügt es daher nicht, Ganzzahligkeitsbedingungen lediglich durch eine zusätzliche Restriktion bei der Modellformulierung zu vermerken; vielmehr ist die Kenntnis und Analyse der Ganzzahligkeitsverfahren der Unternehmensforschung unerläßlich, um die Lösbarkeit des ökonomischen Problems zu prüfen[1] und gegebenenfalls ein geeignetes Verfahren anzuwenden.

Diese Forderung wird um so dringlicher, wenn man bedenkt, daß bei größeren Problemen die einzelnen Verfahren unterschiedlich schnell die Kapazitätsgrenze der elektronischen Rechenanlagen erreichen und somit die Möglichkeit der Rechenbarkeit eines Problems vom ausgewählten Rechenverfahren abhängen kann.

Aus den angeführten Gründen wird die Darstellung einiger ausgewählter ganzzahliger Optimierungsverfahren der Unternehmensforschung unumgänglich.

---

[1] Vgl. auch MÖLLER-MERBACH, H.: Operations Research, a.a.O., S. 367.

42 Problemstellung der ganzzahligen linearen Programmierung

Die ganzzahlige lineare Programmierung[1] befaßt sich mit diskreten linearen Optimierungsproblemen[2], bei denen entweder für alle Problemvariablen des Modells die Ganzzahligkeit gefordert wird oder lediglich einige ausgewählte Variablen der Ganzzahligkeit unterliegen.

Die erste Gruppe wird als rein ganzzahlige Programmierung (All-integer Integer Programming oder All Integer Programming) bezeichnet, während bei der zweiten Gruppe von gemischt ganzzahliger Programmierung[3] (Mixed Integer Programming) gesprochen wird.

---

[1] Um Verwechslungen mit der Programmierung elektronischer Rechenanlagen zu vermeiden, wird von einigen Autoren der Begriff 'ganzzahlige Planungsrechnung', verwendet. Vgl. u.a. MÜLLER-MERBACH, H.: Operations Research, a.a.O., S. 366.

[2] Ganzzahlige Optimierungsprobleme beschränken sich nicht nur auf Modelle mit linearen Abhängigkeiten der Variablen, sondern es sind in der Literatur auch Modelle mit konvexen und quadratischen Optimierungsproblemen beschrieben. Vgl. dazu u.a. HU, T.C.: Integer Programming and Network Flows. Menlo Park,(California), London, Don Mills 1969, S. 272-286. KELLEY, J.E., jr.: The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs. In: SIAM, Journal of Applied Mathematics, Jg. 8 (1960), S.703-712. KONZI, H.P., KRELLE, W.: Einführung in die Mathematische Optimierung, Zürich 1969, S. 111-119. KRELLE, W.: Ganzzahlige nichtlineare Programmierung für trennbare Funktionen. In: Operations Research Verfahren. Hrsg. v. R. HENN, Bd. 5, 1968, S. 220-236. KONZI, H.P., OETTLI, W.: Integer Quadratic Programming. In: Recent Advances in Mathematical Programming. Hrsg. v. R.L. GRAVES u. P. WOLFE. New York 1963, S. 303-308. LÖDER, K., STREITFERDT, L.: Die Bestimmung optimaler Portefeuilles unter Ganzzahligkeitsbedingungen. In: Zeitschrift für Operations Research. Bd. 16 (1972), Serie B, S. B 89-113.

[3] Anwendungen gemischt ganzzahliger Programmierungsprobleme vgl. auch bei ALBACH, H.: Lineare Programmierung als Hilfsmittel betrieblicher Investitionsplanung. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Jg. 12 (1960), S. 526 ff. DANTZIG, G.B.: On the Significance of Solving Linear Programming Problems with Some Integer Variables: In: Econometrica, Jg. 28 (1960), S. 30-44. DINKELBACH, W., HAX, H.: Die Anwendung der gemischt ganzzahligen linearen Programmierung auf betriebswirtschaftliche Entscheidungsprobleme, a.a.O., S. 179-196. DINKELBACH, W., STEFFENS, F.: Gemischt ganzzahlige lineare Programme zur Lösung gewisser Entscheidungsprobleme. In: Unternehmensforschung, Jg. 5 (1961), S. 3-14. KRELLE, W., KONZI, H.P.: Ganzzahlige Programmierungen. Theorie und Anwendungen in der Praxis. In: Unternehmensforschung, Jg. 2 (1958), S. 161-175. MARKOWITZ, H.M., MANNE, A.S.: On the Solution of Discrete Programming Problems. In: Econometrica, Jg. 25 (1957), S. 84-110. DRIEBEEK, N.J.: An Algorithmen for the Solution of Mixed Integer Programming Problems. In: Management Science, Jg. 12 (1966), S. 576-587.

Ein Sonderfall der ganzzahligen Programmierung kann in den sogenannten 0-1 Problemen bzw. der binären Optimierung[1] gesehen werden, bei der die Variablen die Werte Null oder Eins annehmen können, d.h. entweder wird die Variable mit einem vorher festgelegten Wert in das Programm aufgenommen oder der Variablen wird der Wert Null zugeordnet[2].

---

[1] Die Problemgruppe unterliegt nicht unserer Betrachtung. Zur Darstellung und Lösung binärer Optimierungsprobleme vgl. u.a. BRAUER, K.M.: Binäre Optimierung. Köln, Berlin, Bonn, München 1969.
IHDE, G.-B.: Zur Behandlung zweiwertiger Entscheidungen. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 38 (1968), S. 93-104.
BALAS, E.: An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables. In: Operations Research, Vol. 13 (1965), S. 517-546.
LEMKE, C.E.; SPIEGELBERG, K.: Direct Search Algorithms for Zero-One and Mixed-Integer Programming. In: Operations Research, Jg. 15 (1967), S. 892-914.
SCHMIDT, B.: Ganzzahlige lineare Optimierung und das Knapsack-Problem. In: Operations Research Verfahren. Hrsg. v. R. HENN u.a., Bd. 10, 1971, S. 175-180.
SCHMIDT versucht, einen Zusammenhang zwischen einem allgemeinen ganzzahligen linearen Programm und einem dazu äquivalenten Knapsackproblem herzustellen.
Ähnliche Beziehungen versucht BRADLEY aufzuzeigen. Vgl. BRADLEY, G.: Transformation of Integer Programs to Knapsack Problems. In:Discrete Mathematics,Jg.1(1971),S.29-45.

[2] Unter diese Klasse fällt die Behandlung der sogenannten Knapsack- oder Rucksackprobleme, bei denen eine Zielfunktion zu maximieren oder minimieren ist und das Restriktionssystem lediglich aus einer Beschränkung besteht.Die einzelnen Variablen x_j können dabei entweder mit einem festen Wert,der größer als Null ist,in das Programm aufgenommen werden oder sie erhalten den Wert Null zugewiesen.

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{die Variable } j \text{ wird mit einem festen Wert in das Programm aufgenommen,} \\ 0, & \text{die Variable } j \text{ findet in dem Programm keine Berücksichtigung.} \end{cases}$$

Zum Knapsackproblem sei aus der umfangreichen Literatur genannt: KOLESAR, P.J.: A Branch and Bound Algorithm for the Knapsack Problem. In: Management Science, Jg.13(1967), Serie A, S. 723-735.
KYED, N.: Ein Algorithmus für ein verallgemeinertes Knapsack-Problem. In: Einführung in die Methode Branch and Bound. Hrsg.v.F. WEINBERG, Berlin, Heidelberg, New York 1968, S. 59-72.
GILMORE,C.;GOMORY,R.E.: The Theory and Computation of Knapsack Functions.In:Operations Research,Vol. 14 (1966), S. 1045-1074.
CABOT,A.V.: An Enumeration Algorithm for Knapsack Problems. In:Operations Research, Vol. 18 (197o), S. 3o6-311.
GREENBERG,H.;HEGERICH,R.L.: A Branch Search Algorithm for the Knapsack Problem.In:Management Science, Jg.16(1970), Serie A, S. 327-332.

43 Verfahren der ganzzahligen linearen Programmierung

Die gebräuchlichsten Methoden zur Lösung linearer Planungsmodelle - wie vor allem die Simplexmethode - liefern im allgemeinen nicht auf Anhieb ganzzahlige optimale Lösungswerte[1].

Das liegt daran, daß bei der ganzzahligen Optimierung die Menge der zulässigen Lösungen nicht - wie bei kontinuierlichen Variablen, auf die die Simplexmethode anzuwenden ist - konvex ist, so daß von einer gemischtzahligen Optimalität nicht auf die ganzzahlige Optimalität geschlossen werden kann.

Die naheliegende Lösungsmöglichkeit für ganzzahlige Optimierungsprobleme liegt in der Berechnung der gemischtzahligen Optimallösung und der anschließenden Rundung der gemischtzahligen Optimalwerte zu ganzen Zahlen.

Handelt es sich um ein Problem, bei dem in der gemischtzahligen Optimallösung alle Variablen hohe Zahlenwerte annehmen, kann die Auswirkung der Rundung der Lösungswerte für den Zielwert relativ gering sein[2].

---

[1] Aufgrund ihrer besonderen Struktur gibt es jedoch Probleme mit ganzzahligen Variablen, die bei der Lösung mit Hilfe der Simplexmethode bei einer zulässigen Lösung automatisch ganzzahlige Lösungswerte erhalten.
Als Beispiele seien Zuordnungsprobleme oder Transportprobleme genannt, wobei in letzterem Beispiel stets ganzzahlige Lösungswerte errechnet werden, wenn die zu transportierenden Mengen ganzzahlig sind und kein Warenschwund auftritt.

[2] Eine Rundungsmöglichkeit besteht auch nur dann, wenn die gerundeten ganzzahligen Lösungswerte die Restriktionen des Problems nicht verletzen, so daß die gerundeten Lösungswerte auch zulässig sind.
Die relativen Abweichungen des gerundeten Ergebnisses vom Optimalwert sind um so größer, je kleiner der zu rundende gemischtzahlige Variablenwert ist und je weiter er von einer ganzen Zahl entfernt liegt. Vergl. LINDNER, L.: Grundlagen und Bedeutung von Algorithmen zur ganzzahligen linearen Programmierung. Diss. Berlin 1972, S. 3 f.

Aus Kostenersparnisgründen wird man in solchen Fällen auf einen zusätzlichen Rechenaufwand zur exakten Bestimmung der ganzzahligen Lösung verzichten und die relativ geringe Abweichung vom Zielwert der Optimallösung in Kauf nehmen.

Nehmen die Werte der Variablen in der gemischtzahligen Optimallösung relativ kleine Werte an, kann eine Rundung der Lösungswerte zu unvertretbaren Fehlentscheidungen führen.

Da bei der simultanen Investitions- und Finanzplanung zumindest die Werte der Investitionsvariablen in der Regel nicht in derartig großen Dimensionen auftreten, die eine Rundung zulassen, müssen zur Lösung obiger Probleme exakte Ganzzahligkeitsalgorithmen eingesetzt werden.

Die Methoden zur Lösung mathematisch formulierter Probleme mit Ganzzahligkeitsforderungen für die Variablen lassen sich nach unterschiedlichen Kriterien gruppieren[1].

---

1 Vgl. u.a. BEALE, E.M.L.: Survey of Integer Programming. In: Operational Research Quarterly, Vol. 16 (1965), S. 219-228.
MÖLLER-MERBACH nimmt z.B. eine Dreiteilung in
1. cutting-plane-Verfahren
2. Entscheidungsbaumverfahren
3. Heuristische Verfahren
vor. Vgl. MÖLLER-MERBACH, H.: Operations Research.a.a.O., S. 368. Bei den heuristischen Verfahren, die nicht unserer Betrachtung unterliegen - da sie kein exaktes Optimierungsverfahren darstellen -, ist die Optimalität der gefundenen Lösung nicht gesichert, so daß nur zulässige gute Lösungen garantiert werden können. Vgl. die Darstellung heuristischer Entscheidungsmodelle u.a. bei KLEIN, H.K.: Heuristische Entscheidungsmodelle, Wiesbaden 1971.
ECHOLS, R.E.; COOPER, L.: The Solution of Integer Linear Programming. Problems by Direct Search. In: Journal of the ACM,Vol. 15 (1968), S. 75-84.
MÖLLER, O.: Exakte und heuristische Methoden zur Lösung von Reihenfolgeproblemen, In: NIEVERGELT, E. u.a.: Praktische Studien zur Unternehmensforschung. Berlin, Heidelberg, New York 197o, S. 49-1o7, bes. S. 55 ff.

Die folgende Untersuchung befaßt sich mit dem Vergleich zweier Gruppen von Verfahren zur Lösung linearer ganzzahliger Planungsprobleme

1. Verzweigungsverfahren
2. Schnitthyperebenen- bzw. cutting-plane-Verfahren

sowie deren Anwendungsmöglichkeit auf finanzwirtschaftliche Modelle[1].

Wegen der Anwendung der dualen Simplexmethode als Rechenverfahren sowohl bei Verzweigungs- als auch bei Schnitthyperebenenverfahren - besonders aber bei dualen Schnitthyperebenenverfahren - zur Optimierung diskreter Probleme soll zunächst die Theorie und Vorgehensweise des angesprochenen Verfahrens aufgezeigt werden.

---

[1] Weitgehende theoretische Untersuchungen und mathematische Beweise werden nur dann vorgenommen, wenn sie eine Aussage im Hinblick auf die Anwendbarkeit des Verfahrens bewirken.

431 Exkurs: Duale Simplexmethode

4311 Primal - Dualbeziehungen

Die engen Verknüpfungen zwischen dem Primal- und Dualproblem[1] linearer Optimierungsmodelle haben zur Entwicklung der dualen Simplexmethode geführt.

---

[1] Die Beziehungen zwischen dem primalen- und dem dazugehörigen dualen Programm sowie die Darstellung der Dualitätstheoreme findet man in fast jedem Lehrbuch über lineare Programmierung. Vgl. besonders MÖLLER-MERBACH, H.: Operations Research, a.a.O., S. 133 ff. - KREKÓ, B.: Lehrbuch der linearen Optimierung, 4. Aufl., Berlin 1969, S. 68-74. DANTZIG, G.B.: Lineare Programmierung und Erweiterungen, a.a.O., S. 148-162. KRELLE, W.; KÜNZI, H.P.: Lineare Programmierung, a.a.O., S. 35-43. - GALE, D.: The Theory of Linear Economic Models. New York u.a.O. 1960, S. 78-82. SUCHOWITZKI, S.I.; AWDEJEWA, L.I.: Lineare und konvexe Programmierung. München, Wien 1969, S.87-108. GARWIN, W.W.: Introduction to Linear Programming. New York 1960, S. 248 ff. - GASS, S.J.: Linear Programming, New York u.a.O. 1958, S. 71 ff. HADLEY, G.: Linear Programming, London 1962, S.221 ff. JOKSCH, H.C.: Lineares Programmieren, 2. Aufl., Tübingen 1965, S. 130 ff. - DANTZIG, G.B., u.a.: A Primal-Dual Algorithm for Linear Programs. In: Linear Inequalities and Related Systems. Hrsg. v. H.W. KUHN, A.W. TUCKER, Princeton 1956, S.171-181. Operationsforschung. Mathematische Grundlagen, Methoden und Modelle. Hrsg. v. W. DÖCK und M. BLIEFERNICH, Berlin 1971, S. 159-167. Lehrbuch der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften, Hrsg. v. H. KÖRTH, u.a., a.a.O., S. 308 ff. LÖCKE, W.: Produktions- und Kostentheorie, a.a.O., S. 267.

Zur Veranschaulichung sollen die ökonomischen Zusammenhänge zwischen dem Primal- und Dualproblem an einem Beispiel aufgezeigt werden[1], das die Dualität im Bereich der Investitions- und Finanzierungsplanung zeigt.

Beispiel

Einer Unternehmung 1 stehen verschieden hohe Finanzierungsmittelbeträge b_t in den einzelnen Perioden t zur Verfügung. Unter Berücksichtigung dieser begrenzten Ressourcen und der unterschiedlichen Kapitalinanspruchnahme der jeweiligen Investitionsaktivitäten d_{tj} in den einzelnen Perioden soll ein optimales Investitionsprogramm erstellt werden[2], das die Summe der Erfolgsbeiträge c_j der Investitionsobjekte x_j maximiert.

Unternehmung 1

Zielfunktion

$$G = \sum_{j=1}^{\bar{j}} c_j \cdot x_j = \max!$$

Beschränkungen

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} d_{tj} \cdot x_j \leqq b_t \quad \forall\ t = 1, \ldots, T$$

$$x_j \geqq 0 \quad \forall\ j = 1, \ldots, \bar{j}$$

$$D = \begin{vmatrix} d_{11} \cdots d_{1\bar{j}} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ d_{T1} \cdots d_{T\bar{j}} \end{vmatrix}, \qquad C' = (c_1, \ldots, c_{\bar{j}})$$

$$X' = (x_1 \ldots, x_{\bar{j}})$$

---

[1] Auf die Ableitungen und Beweise wichtiger Dualitätssätze soll hier verzichtet werden; vgl. dazu die Literatur der Fußnote 1 auf S. 127.

[2] Das Beispiel und die Symbolik wurden von S. 50 übernommen.

In Matrizen- bzw. Vektorenschreibweise ergibt sich als Problem:

$$\begin{aligned} G = C'X &= \max! \\ DX &\leqq B \\ X &\geqq 0 \end{aligned}$$

Eine Unternehmung 2 benötige Kapitalbeträge zur Anlage. Sie will deshalb die Ressourcen b_t der Unternehmung 1 abkaufen. Dazu formuliert die Unternehmung 2 ein Programm, das den optimalen Preisvektor[1] für den Kauf der Kapitalbeträge

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_T \end{pmatrix}$$

ermitteln soll. Dieser Preisvektor muß so gestaltet sein, daß sich die Unternehmung 1 bereitfindet, die zur Verfügung stehenden Kapitalbeträge abzugeben und damit auf die Realinvestitionen x_j zu verzichten.

Andererseits wird die Unternehmung 2 bemüht sein, die Ressourcen möglichst billig zu erwerben, um die eigenen Beschaffungskosten zu minimieren. Daraus ergibt sich die

Zielfunktion der Unternehmung 2

$$K = \sum_{t=1}^{T} b_t \cdot q_t = \min!$$

Unter Berücksichtigung der eigenen Zielfunktion würde die Unternehmung 2 bei den Preisen $q_t \rightarrow -\infty$ zielgerecht handeln.

Bei diesen Preisen wird die Unternehmung 1 jedoch nicht bereit sein, ihre Ressourcen abzugeben, sondern die Mittel im eigenen Prozeß einsetzen. Daher muß eine Preisuntergrenze für die Preise q_t gefunden werden, die es der Unternehmung 1 lohnenswert macht, die eigenen Ressourcen an die Unternehmung 2 zu verkaufen und damit auf die Einsetzung dieser Produktionsfaktoren im eigenen Prozeß zu verzichten.

---

[1] Der Preis für eine Kapitaleinheit entspricht dem Zinssatz.

Die Unternehmung 1 wird die Ressourcen an die Unternehmung 2 nur dann verkaufen, wenn der Gewinn bzw. Überschuß aus den Investitionen kleiner ist als der Gewinn aus dem Verkauf der eigenen Ressourcen. Es liegt hier also der Fall des bilateralen Monopols vor, bei dem die Unternehmung 1 als Monopolist[1] und die Unternehmung 2 als Monopsonist fungiert.

Gesucht wird der Ausbeutungspunkt der Unternehmung 1, d.h. der Preis, zu dem die Unternehmung 1 gerade noch bereit ist, ihre Ressourcen zu verkaufen und auf eine Eigennutzung zu verzichten.

Da die Mengen b_t konstant vorgegeben sind, können nur die Preise q_t als Verhandlungsgegenstand angesehen werden.

Betrachtet man die Matrix D der Unternehmung 1

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1\bar{j}} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{T1} & \cdots & d_{T\bar{j}} \end{pmatrix}$$

so bedeutet der Spaltenvektor $d_1 = (d_{11}, d_{21}, .., d_{T1})$ das finanzielle"Verfahren"für das Investitionsobjekt 1, d.h. die finanzielle Beanspruchung des Investitionsobjekts 1 in den einzelnen Perioden t=1,.., T.

---

[1] Zur Monopoltheorie existieren zahlreiche volkswirtschaftliche Lehrbücher. Vgl. u.a. STACKELBERG, H.v.: Grundlagen der theoretischen Volkswirtschaftslehre. 2. Aufl., Tübingen, Zürich 1951, S. 185-2o6. SCHNEIDER, E.: Einführung in die Wirtschaftstheorie, Teil II, 10. Aufl., Tübingen 1965, S. 328-371. KRELLE, W.: Preistheorie. Tübingen, Zürich 1951. HENDERSON, J.M.; QUANDT, R.E.: Mikroökonomische Theorie. Eine mathematische Darstellung. 2. Aufl., Berlin, Frankfurt/M. 1970, S. 175-185 und S. 206-208. OTT, A.E.: Preistheorie. In: Kompendium der Volkswirtschaftslehre. Bd. 1, Hrsg. v. W. EHRLICHER u.a., 2. Aufl., Göttingen 1969, S. 124-192. RICHTER, R.: Preistheorie. Wiesbaden 1963, S. 149-163.

Bewertet man einen Spaltenvektor $d_j = (d_{1j},\ldots,d_{Tj})$ mit den Preisen[1] $(q_1, .., q_T)$ und summiert die so erhaltenen Produkte auf, erhält man den Erlös[2] für die Kapitalbeträge $d_j = (d_{1j}, .., d_{Tj})$, wenn auf eine Einheit der Investition j verzichtet wird und die dadurch zur Verfügung stehenden finanziellen Beträge in den einzelnen Perioden anderweitig zu den entsprechenden Preisen angelegt werden[3].

Unter Beachtung dieser Überlegung wird die Unternehmung 1 ihre Kapitalbeträge nur dann an die Unternehmung 2 verkaufen, wenn der Erlös für die Kapitalbeträge größer als der Erfolgsbeitrag c_j für das Investitionsobjekt j ist.

Daraus ergibt sich für die Unternehmung 2 folgende Nebenbedingung:

$$\sum_{t=1}^{T} d_{jt} \cdot q_t \geqq c_j \qquad \forall \; j = 1, .., \bar{J}$$

Da die Unternehmung 1 mit Sicherheit keine negativen Preise q_t (t=1, .., T) akzeptieren wird, folgt als weitere Nebenbedingung

$$q_t \geqq 0 \qquad \forall \; t = 1, .., T$$

---

[1] Unter dem Preisvektor $Q' = (q_1, .., q_T)$ wird die Verzinsung bzw. der Zinssatz für die Finanzierungsbeträge der entsprechenden Periode t verstanden.

[2] Der Erlös wird hier in Form von Zahlungsmittelbeträgen dargestellt.

[3] Von einer Diskontierung soll aus Vereinfachungsgründen abgesehen werden.

Damit kann das Dualproblem für die Unternehmung 2, das aus dem Primalproblem der Unternehmung 1 abgeleitet wurde, vollständig beschrieben werden.

Unternehmung 2

Dual

$$K = \sum_{t=1}^{T} b_t \cdot q_t = \min!$$

$$\sum_{t=1}^{T} d_{jt} \cdot q_t \geqq c_j \qquad \forall \; j = 1, .., \bar{J}$$

$$q_t \geqq 0 \qquad \forall \; t = 1, .., T$$

In Matrizen- bzw. Vektorenschreibweise:

Unternehmung 1 (Primalproblem)	Unternehmung 2 (Dualproblem)
$G = C' \cdot X = \max!$	$K = B' \cdot Q = \min!$
$D \cdot X \leqq B$	$D^{T} \cdot Q \geqq C$
$X \geqq 0$	$Q \geqq 0$

Die Optimierung des Dualproblems liefert als Lösungswerte den optimalen Preisvektor Q.

Bei der Lösung des Primalproblems fallen ebenfalls die optimalen Werte des Preisvektors Q als Schattenpreise in den Spalten der Schlupfvariablen an.

Aus den Primal-Dual Beziehungen linearer Optimierungsprobleme lassen sich allgemeine Dualitätstheoreme ableiten[1], die auf den Lösungsgang des Problems und die Anwendung der dualen Simplexmethode Einfluß haben:

---

[1] Auf die Beweise der Dualitätstheoreme wird verzichtet und auf die Literaturangaben der Fußnote auf S. 128 verwiesen.

Zu jedem primalen Maximierungs- (Minimierungs-) Problem läßt sich ein duales Minimierungs- (Maximierungs-) Problem formulieren.

Gibt es eine optimale primale Lösung, so existiert auch eine optimale duale Lösung und die dazugehörigen Zielwerte sind identisch. Die Erkenntnis, daß die Zielwerte beider Programme gleich sind und die optimalen Lösungswerte durch beide Programme (Primal- bzw. Dualprogramm) errechnet werden können, hat zur Folge, daß eine Aufgabe sowohl im Primal als auch im Dual gelöst werden kann[1].
Eine Regel, die über die Vorteilhaftigkeit des Lösungsweges über das Primal- oder Dualproblem Auskunft gibt, existiert nicht. Jedoch kann manchmal aufgrund der Problemstruktur von vornherein eine Lösungsmethode günstiger als die andere sein. Hat das Primal z.B. wenig Variablen und sehr viele Beschränkungsgleichungen, bietet sich für die Lösung des Problems das duale Programm an, da im Dual dann nur wenig Variablen in die Basis kommen und somit der Iterationsvorgang abgekürzt werden kann.

---

[1] Vgl. GALE, D.: The Theory of Linear Economic Models, a.a.O., S. 78 ff.

4312 Beschreibung der dualen Simplexmethode[1]

Die duale Simplexmethode ist ein Lösungsverfahren, "bei dem Überlegungen für die Dualaufgabe an Simplextableaus der Primalaufgabe ausgeführt werden und somit allein durch Benutzung der Daten dieser Tableaus eine Optimallösung der Primalaufgabe gefunden wird"[2].

Während die reguläre Simplexmethode von zulässigen Basislösungen ausgeht und die Erfüllung des Simplexkriteriums ($c_j^o \geq 0$; $\forall\ j=1, .., \overline{j+i}$; c_j^o = Schattenpreise im primalen Optimaltableau)[3] anstrebt, geht die duale Simplexmethode von unzulässigen, optimalen Primallösungen aus, deren Zulässigkeit durch den Iterationsprozeß bei Aufrechterhaltung der Optimalität angestrebt wird. Ist eine zulässige primale Lösung erreicht, liegt auch gleichzeitig das Optimum vor.

Um die Zulässigkeit schrittweise durch Iterationen zu erzwingen, werden die Sätze der Dualtheorie hinzugezogen.

PRIMAL:[4]

$$G = \sum_{j=1}^{\overline{j}} c_j \cdot x_j = \max!$$

$$\sum_{j=1}^{\overline{j}} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \qquad \forall\ i=1, .., \overline{i}$$

---

[1] Die duale Simplexmethode, auch dualer Simplexalgorithmus genannt, geht auf C.E. LEMKE zurück. Vgl. LEMKE, C.E.: The Dual Method of Solving the Linear Programming Program. In: Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 1 (1954), S. 36 ff.

[2] Lehrbuch der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften, a.a.O., S. 318 f.Eine Beschreibung der dualen Simplexmethode wird im obigen Lehrbuch besonders eindrucksvoll gegeben. Vgl. S. 319-325.

[3] Der hochgestellte Index "o" bei einem Symbol bedeutet, daß sich die Betrachtung auf die optimale gemischtzahlige Lösung bezieht.

[4] Die Beschreibung der folgenden Beziehungen wird auf die allgemein übliche Symbolik der linearen Programmierung beschränkt.

DUAL:

$$K = \sum_{i=1}^{\overline{i}} b_i \cdot q_i = \min!$$

$$\sum_{i=1}^{\overline{i}} a_{ji} \cdot q_i \geqq c_j \qquad \forall \; j=1, \ldots, \overline{j}$$

Aus dem Simplexkriterium im Optimaltableau des Primals

$$(43121) \qquad c_j^{\,o} = - c_j + \sum_{i=1}^{\overline{i}} a_{ij} \cdot q_i^{\,o} \geqq 0$$

folgt die Zulässigkeit des Dualproblems

$$(43122) \qquad \sum_{i=1}^{\overline{i}} a_{ij} \cdot q_i^{\,o} \geqq c_j \qquad \forall \; j=1, \ldots, \overline{j}$$

Bei der Einführung zusätzlicher restriktiv wirkender Nebenbedingungen[1] wird die vorher berechnete Optimallösung des Primals unzulässig ($\overline{b}_i < 0$)[2]. Das Simplexkriterium bleibt durch die Veränderung der Restriktionen jedoch weiterhin erfüllt, so daß das Dual seine Zulässigkeit behält.

Die duale Simplexmethode geht nun in der Weise vor, daß ausgehend von einem optimalen, aber unzulässigen Primaltableau mit Hilfe des Dualalgorithmus das Primaltableau solange verändert wird, bis eine primal zulässige und damit gleichzeitig auch dual optimale Lösung gefunden ist.

---

[1] Vgl. die Beziehung zu den Schnitthyperebenenverfahren im Kapitel 433.

[2] Der waagerechte Strich über dem Element b_i bedeutet, daß eine bestimmte Basislösung betrachtet wird.

4313 Formaler Ablauf der dualen Simplexmethode

Die Vorgehensweise des dualen Simplexalgorithmus entspricht der Anwendung der Simplexmethode auf das Dualproblem. Die explizite Formulierung des Dualproblems wird jedoch durch vertauschte Auswahlvorschriften für die Pivotzeile und -spalte überflüssig, so daß lediglich im Primaltableau gerechnet wird. Da das Ziel der dualen Simplexmethode in der Beseitigung der negativen Lösungswerte und damit der Beseitigung der Unzulässigkeit der primalen Lösung besteht, erfolgt zunächst die Auswahl der Pivotzeile l durch das Kriterium:

$$\bar{b}_l = \min_i \left\{ \bar{b}_i \;\middle|\; \bar{b}_i < 0 \right\}, \quad i = 1, \ldots, \bar{I} \qquad l = \text{Pivotzeile}$$

Es wird das am stärksten die Restriktion verletzende $\bar{b}_i$ aus der Basis beseitigt. Da das ausgewählte negative Lösungselement durch ein positives zu ersetzen ist, muß das entsprechende $\bar{a}_{lr} < 0$ sein. (r = Pivotspalte, a_{lr} = Pivotelement). Um die Pivotspalte und das Pivotelement festzulegen sowie die in die Lösung aufzunehmende Variable zu ermitteln, wird der Engpaß bestimmt.

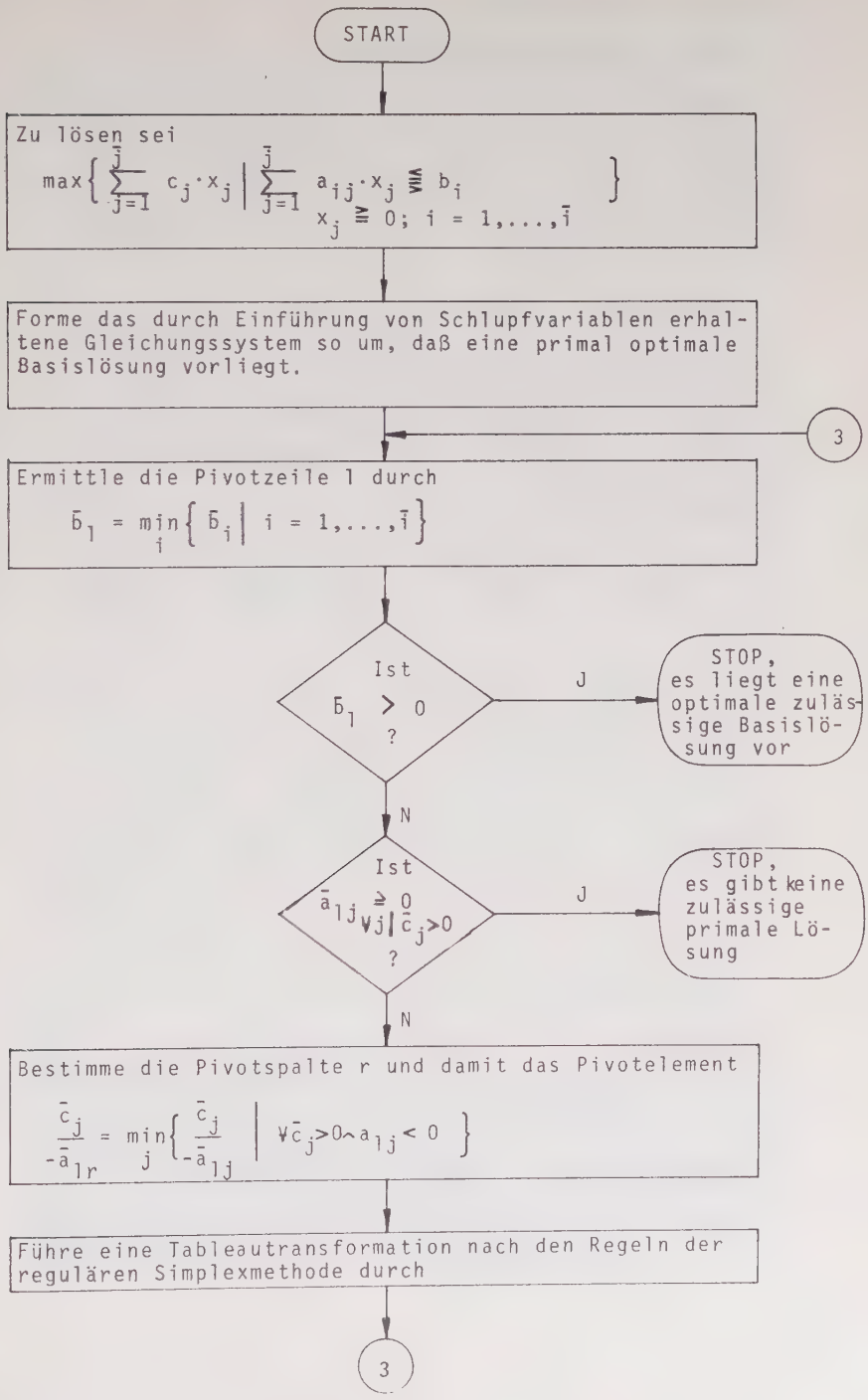
$$\frac{\bar{c}_j}{-\bar{a}_{lr}} = \min_{\substack{j \\ j \in NBV}} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{-\bar{a}_{lj}} \;\middle|\; \bar{a}_{lj} < 0,\ \bar{c}_j > 0 \right\}$$

NBV = Menge der Nichtbasisvariablen

Existiert kein $\bar{a}_{lj} < 0$ für $\bar{b}_l < 0$, so ist die Lösung des dualen Programms unbeschränkt und das Primal hat keine Lösung; das bedeutet, daß das Planungsproblem widersprüchlich formuliert ist.

Ist das Pivotelement nach obigen Auswahlregeln bestimmt, erfolgt eine Tableautransformation nach den Regeln der Simplexmethode. Dieser Ablauf wiederholt sich solange, bis alle $\bar{b}_i \geq 0$ sind.

Flußdiagramm zum Ablauf der dualen Simplexmethode



432 Verzweigungsverfahren

4321 Idee der Verzweigungsverfahren

Die Verzweigungsverfahren - auch als Branch-and-Bound-Verfahren[1] bezeichnet - gehen von der Menge aller zulässigen Lösungen aus, die stufenweise nach bestimmten Regeln in disjunkte Unter- oder Teilmengen aufgespalten (branching) wird.

---

[1] Bei der Anwendung der Branch-and-Bound-Verfahren sind zwei Problemkreise zu unterscheiden:
Einerseits werden die Probleme angesprochen, deren Variablen beliebige ganzzahlige Lösungswerte aufweisen müssen. Diese Probleme unterliegen unserer Betrachtung. Andererseits findet die Methode Branch-and-Bound auf reine Zuordnungsprobleme, wie z.B. das Travelling Salesman Problem Anwendung, d.h. es wird eine Zuordnung vorgenommen oder nicht. Diese Fragestellungen werden als 0-1 Probleme bezeichnet. Vgl. zur Darstellung und Anwendung der Branch-and-Bound-Verfahren u.a. LAWLER, E.L., WOOD, D.E.: Branch and Bound Methods. A Survey. In: Operations Research, Vol. 14 (1966), S. 699-719. LITTLE, J.D.C., u.a.: An Algorithm for the Travelling Salesman Problem. In: Operations Research, Vol. 11 (1963), S. 972-989. ESCHER, G.: Einführung in die Methode Branch and Bound. In: Einführung in die Methode Branch and Bound. Hrsg. v. F. WEINBERG, (Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics. Hrsg. v. M. BECKMANN und H.P. KONZI, Bd. 4), Berlin-Heidelberg-New York 1968, S. 1-16. BLOECH, J., IHDE, G.-B.: Betriebliche Distributionsplanung. Zur Optimierung der logistischen Prozesse. Würzburg-Wien 1972, S. 42 ff. und S. 109 ff. Operationsforschung. Mathematische Grundlagen, Methoden und Modelle, a.a.O., S. 170 ff. AGIN,N.: Optimum Seeking with Branch and Bound. In: Management Science, Vol. 13 (1966), Series B, S. 176-185. BALINSKI, M.L.: Integer Programming: Methods, Uses, Computation. In: Management Science, Vol. 12 (1966), Serie A, S. 253-313. KORTE, B., u.a.: Ein lexikographischer Suchalgorithmus zur Lösung allgemeiner ganzzahliger Programmierungsaufgaben. In: Unternehmensforschung, Bd. 13 (1969), Teil I, S. 73-98, Teil II, S. 171-192, Nachtrag, Bd. 14, S. 228-234. JAESCHKE, G.: Branching and Bounding. Eine allgemeine Methode zur Lösung kombinatorischer Probleme. In: Ablauf- und Planungsforschung. Jg. 5 (1964), S. 133-155. MÖLLER-MERBACH, H.: Optimale Reihenfolgen. Berlin-Heidelberg-New York 1970. KORBUT, A.A., FINKELSTEIN, J.J.: Diskrete Optimierung, Berlin 1971, S. 160 ff. MITTEN, J.J.: Branch and Bound Methods: General Formulation and Properties. In: Operations Research, Vol. 18 (1970), S. 24-34.

Für jede Teilmenge wird ein sogenannter Bound berechnet, der den besten Zielwert aller in der Teilmenge enthaltenen Lösungen angibt und als Kriterium für eine weitere Verzweigung in disjunkte Teilmengen dienen kann. Enthält der betrachtete Bound nicht ausschließlich ganzzahlige Lösungswerte, so werden in der Folge weiterhin solange disjunkte Untermengen gebildet, bis ein Bound mit ausschließlich ganzzahligen Lösungswerten gefunden ist und kein weiterer Endknoten existiert, der einen besseren Zielwert aufweist, so daß die berechnete Lösung mit der Optimallösung identisch ist[1].
Der Lösungsvorgang wird nicht nur dann beendet, wenn ein ganzzahliger Bound mit einem optimalen Zielwert vorliegt, sondern auch, wenn eine weitere Aufspaltung der vorhandenen Teilmengen nicht mehr möglich ist, obwohl noch keine ganzzahlige Lösung vorliegt. In diesem Fall hat das ganzzahlige Problem keine Lösung.

Durch das beschriebene Vorgehen werden Lösungsteilmengen, die nicht zur ganzzahligen Optimumfindung beitragen können, frühzeitig eliminiert, so daß nur noch die Teilmengen einer weiteren Betrachtung unterliegen, in denen das ganzzahlige Optimum zu finden sein wird.
Die Bildung und Strukturierung der einzelnen Teilmengen hängt dabei von dem speziell angewendeten Verfahren ab.

Wegen der endlichen Anzahl ganzzahliger Lösungspunkte[2] in einem beschränkten Lösungsraum bietet sich theoretisch

---

[1] Die ganzzahlige Optimallösung wird also dadurch bestimmt, daß von einer ganzzahligen - durch Verzweigung erhaltenen- optimalen-Lösung einer Teilmenge auf den optimalen ganzzahligen Lösungsvektor des Gesamtproblems geschlossen wird.

[2] Durch den unterstellten begrenzten Lösungsraum und der damit verbundenen endlichen Anzahl ganzzahliger Lösungspunkte wird die Endlichkeit der betrachteten "Suchverfahren" bei Vorliegen eines beschränkten Problems automatisch gegeben.

auch die Möglichkeit, die ganzzahligen Lösungsvektoren der Lösungsmenge enumerativ zu ermitteln und den jeweils zugehörigen Zielwert zu berechnen, wobei bei Maximierungsproblemen der ganzzahlige Lösungsvektor mit dem größten Zielwert die optimale Lösung darstellt. Diese Vorgehensweise findet bei der Anwendung auf praktische Probleme aus Kapazitätsgründen schnell ihre Grenze, so daß die Anwendung systematischer Verzweigungsverfahren zu untersuchen ist.
Wegen der verhältnismäßig hohen Speicherintensität der Branch-and-Bound Verfahren muß das Ziel der einzelnen Verzweigungsverfahren darin gesehen werden, eine Branchvorschrift derart zu finden, daß die durch den Branch hervorgerufene Aufspaltung der Lösungsmenge möglichst frühzeitig günstige Bounds ganzzahliger Lösungen erzeugt, wodurch nur noch wenige und kleine Teilprobleme zu untersuchen bleiben und eine befriedigende Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens erzielt werden kann[1].

4322 Verfahren LAND and DOIG

43221 Beschreibung des Verfahrens

Das Verfahren von LAND and DOIG[2], das sich sowohl für rein ganzzahlige als auch für gemischt-ganzzahlige Probleme eignet, betrachtet zunächst den gemischtzahligen opti-

---

[1] Einflußgrößen, die den Ablauf eines Branch-and-Bound-Verfahrens maßgeblich beeinflussen, findet man auch bei RUBOW, G.: Die Lösung von Reihenfolgeproblemen aus dem Bereich der Maschinenbelegungsplanung mit Hilfe des Branch and Bound Algorithmus. Würzburg 1969, S. 27.

[2] Vgl. LAND, A.H., DOIG, A.G.: An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. In: Econometrica, Vol. 28 (1960), S. 497-52o. JOKSCH, H. C.: Lineares Programmieren, a.a.O., S. 191 ff. STUHR, R.: Anwendungen und Lösungsverfahren der ganzzahligen linearen Programmierung, Diss. Göttingen 1964, S. 167 ff. KORBUT, A.A., FINKELSTEIN, J.J.: Diskrete Optimierung, a.a.O., S. 164. BALINSKI, M.L.: Some General Methods in Integer Programming. In: Nonlinear Programming, Hrsg. v. J. ABADIE, Amsterdam 1967, S. 221-247, bes. S. 24o ff. PIEHLER, J.: Ganzzahlige lineare Optimierung, Leipzig 197o, S. 41 f.

malen Lösungsvektor X^o mit dem Zielfunktionswert Z_{oo}. Dieser Zielfunktionswert Z_{oo} stellt eine obere Schranke für das Problem dar, da bei Maximierungsproblemen aus Optimalitätsüberlegungen alle weiteren Lösungen Zielwerte $\overline{Z} \leqq Z_{oo}$ aufweisen werden.

Ausgehend von der gemischtzahligen Optimallösung wird ein Baum aufgebaut, dessen Äste dadurch gebildet werden, daß jeweils nichtganzzahlige Lösungswerte einer berechneten Basislösung stufenweise ganzzahlig gemacht werden, indem ganzzahlige Variablenwerte dem Problem schrittweise als Konstanten vorgegeben werden.

Unter Beachtung dieser zusätzlichen Ganzzahligkeitsrestriktion, die das Gesamtproblem lediglich in den Konstantenwerten verändert, wird eine neue Lösung errechnet und auf Zulässigkeit geprüft.

Ist die Lösung zulässig, jedoch nicht rein ganzzahlig, wird bei rein ganzzahligen Problemen nach Prüfung anderer in Frage kommender ganzzahliger Werte für die betreffende Variable eine weitere nicht-ganzzahlige Variable herausgegriffen und ganzzahlig gemacht.

Das Verzweigungsverfahren endet, wenn entweder eine ganzzahlige zulässige Lösung mit einem Zielfunktionswert $\hat{Z}$ gefunden wird und es keinen anderen zulässigen Endknoten mit einem größeren Zielwert gibt oder wenn die Nichtexistenz einer ganzzahligen Lösung nachgewiesen ist.
Der Ablauf des Lösungsverfahrens sei im folgenden kurz umrissen. Zu lösen sei das Problem[1]

---

[1] Die formale Struktur (432211) des Problems kann auch ein lineares Investitions- und Finanzierungsproblem abbilden, wenn die Variablen x_j außer den Investitionsvariablen noch zusätzlich die Finanzierungs- und Finanzanlageparameter bezeichnen.

(432211)

$$\max\left\{ \sum_{j=1}^{\bar{j}} c_j \cdot x_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\bar{j}} a_{ij} \cdot x_j \lesseqgtr b_i;\; x_j \geqq 0 \wedge \in G;\quad \forall i = 1,\ldots,\bar{i} \right\}$$

das den gemischtzahligen Optimalvektor der Lösungsvariablen $X^o = (b_1^o,\ldots,b_{\bar{i}}^o)$ mit dem Zielwert Z_{oo} aufweist.

Enthält der Lösungsvektor eine Variable[1] x_1^o mit einem nichtganzzahligen Lösungswert, wird diese Variable herausgegriffen und ausgehend vom ursprünglichen Problem werden zwei neue Programme gebildet, indem (432211) einmal die Restriktion $x_1 = \left[b_1^o \right]$ und zum anderen die Restriktion $x_1 = \left[b_1^o \right] + 1$ hinzugefügt werden, wobei $\left[b_1^o \right]$ den auf die nächst kleinere ganze Zahl abgerundeten gemischtzahligen Optimalwert b_1^o bezeichnet. Die zusätzlichen Restriktionen erweitern nicht explizit das Problem (432211), sondern die zusätzliche Ganzzahligkeitsbedingung bewirkt - wie erwähnt - lediglich eine Veränderung der konstanten Glieder sowie eine Verkleinerung der durchzurechnenden Probleme um eine Spalte[2,3].

---

[1] In der Regel werden mehrere Variablen nicht ganzzahlige Lösungswerte annehmen. Grundsätzlich ist die Wahl der Variablen für den Verzweigungsschritt gleichgültig, doch hat sich die Auswahl der Variablen, die den größten Abstand zu einer ganzen Zahl hat, als vorteilhaft erwiesen, jedoch garantiert diese Auswahl nicht eine beschleunigte Konvergenz des Verfahrens.

[2] Die Spalte der Variablen x_1 kann gestrichen werden, da diese Variable einen ganzzahligen konstanten Wert erhält.

[3] Durch die zusätzliche Restriktion $x_1 = \left[b_1^o \right]$ bzw. $x_1 = \left[b_1^o \right] + 1$ verliert die alte optimale Lösung zwar ihre Zulässigkeit, jedoch kann mit Hilfe der dualen Simplexmethode verhältnismäßig schnell eine neue zulässige Lösung gewonnen werden, so daß eine völlige Neudurchrechnung der Teilprobleme entfällt.

Somit sind zwei verkleinerte Teilprobleme zu lösen:

Teilproblem 1:

$$\max\left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{\bar{j}} c_j\cdot x_j + c_1\cdot\left[b_1^o\right] \;\middle|\; \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{\bar{j}} a_{ij}\cdot x_j \leqq b_i - a_{i1}\cdot\left[b_1^o\right] \quad \forall i = 1,\ldots,\bar{i}\right\}$$

Teilproblem 2:

$$\max\left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{\bar{j}} c_j\cdot x_j + c_1\cdot\left(\left[b_1^o\right]+1\right) \;\middle|\; \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{\bar{j}} a_{ij}\cdot x_j \geqq b_i - a_{i1}\left(\left[b_1^o\right]+1\right) \quad \forall i = 1,\ldots,\bar{i}\right\}$$

Die zugehörigen optimalen Zielwerte[1] und Knoten der Teilprobleme, die mit Hilfe der Simplexmethode bzw. dualen Simplexmethode berechnet werden können, seien mit Z_{11} und Z_{12} bezeichnet; zu ihnen werden vom Knoten mit dem Zielwert Z_{oo} jeweils Äste gezogen.

Wie LAND and DOIG[2] zeigten, wird wegen der Konvexität der Lösungsmenge der Wert der Zielfunktion des zu betrachtenden Problems um so kleiner, je größer die absolute Differenz $\left|b_1^o - \left[b_1^o\right]\right|$ wird.

Daher liefert das erweiterte Problem mit der zusätzlichen Restriktion $x_1 = \left[b_1^o\right] + 1$ zunächst eine obere Schranke für den Zielfunktionswert der Lösungswerte

---

[1] Die Knoten werden mit den Zielfunktionswerten Z_{kr} bezeichnet, wobei k die Verzweigungsebene und r die Lage des Knotens in der Ebene angibt.

[2] Vgl. LAND, A.H., DOIG, A.G.: An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems, a.a.O., S.502 f. Vgl. auch BURKARD, R.E.: Methoden der ganzzahligen Optimierung, Wien-New York 1972, S. 173 f. und S. 176 f.

$x_1 \geqq b_1^o$ und das Problem mit der zusätzlichen Restriktion $x_1 = [b_1^o]$ zunächst eine obere Schranke für den Zielfunktionswert der Lösungswerte $x_1 \leqq b_1^o$, so daß weitere Teilprobleme mit anderen ganzzahligen Werten der Variablen x_1 vorerst nicht zu berechnen sind.

Ist eine berechnete Lösung unzulässig, endet der betreffende Ast und scheidet aus der Menge der zu betrachtenden Lösungen aus. Sind beide Teillösungen unzulässig, existiert keine ganzzahlige Lösung für das Problem und das Verfahren bricht ab.
Liefern beide Teilprobleme zulässige Lösungswerte, so zeichnet der Zielwert

$$Z_1 = \max \{ Z_{11}, Z_{12} \}$$

eine neue obere Schranke für das Problem, da aus Gründen der Konvexität des Lösungsraumes kein größerer Zielwert unter Beachtung der Ganzzahligkeit für die Variable x_1 existieren kann.

Stellt der Zielwert Z_{11} bei $x_1 = [\bar{b}_1]$ die beste Lösung unter Berücksichtigung der Ganzzahligkeitsforderung für x_1 dar, wird Z_{12} nur dann zur zweitbesten Lösung, wenn $x_1 = [\bar{b}_1] - 1$ unzulässig oder der zugehörige Zielwert Z_{13} kleiner als Z_{12} ist[1], so daß von Z_{oo} ausgehend ein dritter Ast gezogen werden muß.

Dadurch sind zunächst alle Möglichkeiten der Variablen x_1 zur ganzzahligen Lösungsfindung berücksichtigt.

Wird ein Ast betrachtet, dessen erste Lösung gleichzeitig einen ganzzahligen Lösungsvektor aufweist, liegt das ganzzahlige Optimum vor.

---

[1] Vgl. KREUZBERGER, H.: Verfahren zur Lösung ganzzahliger linearer Optimierungsprobleme, Diss. Darmstadt 1969, S. 51.

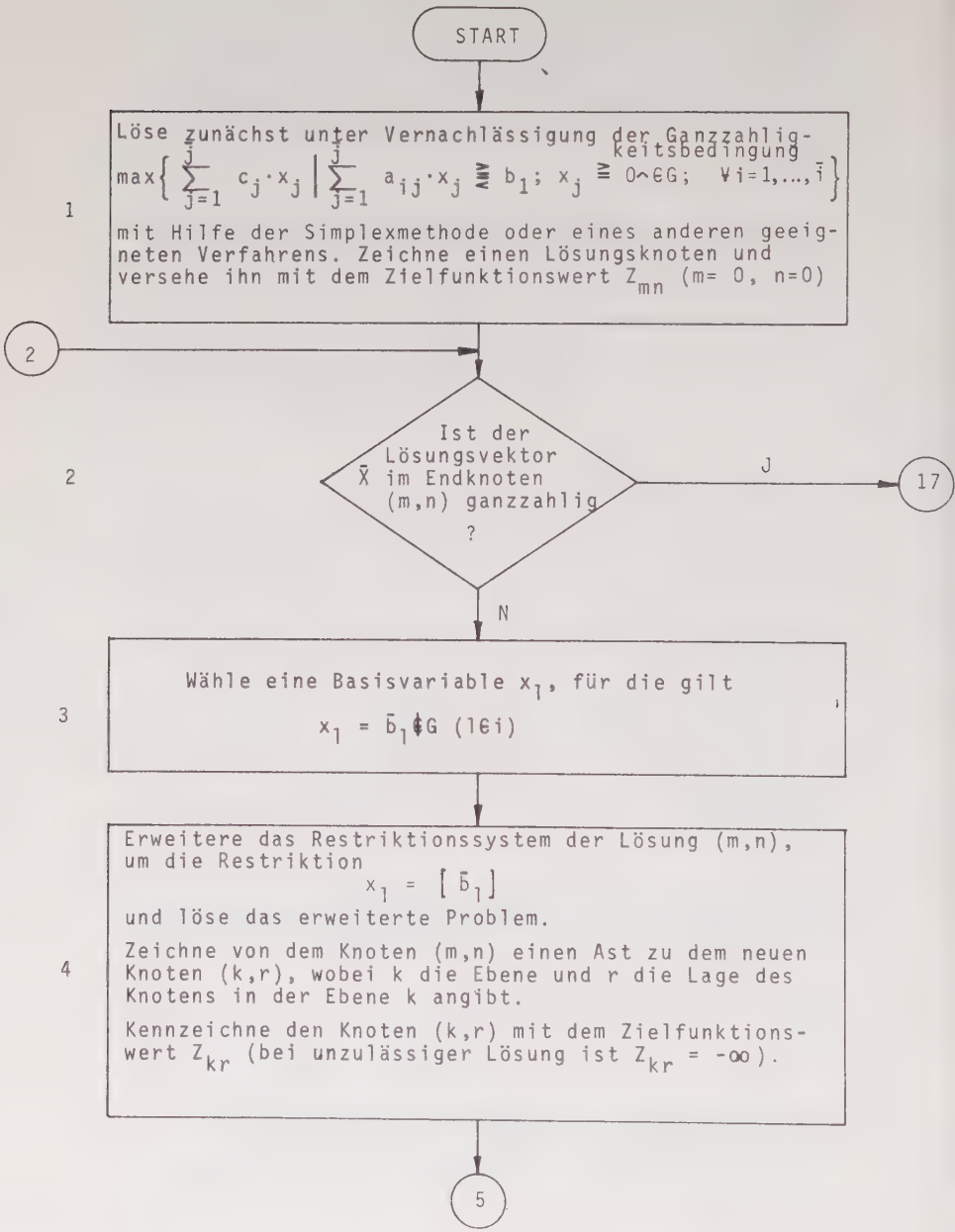
Weist der Lösungsvektor des Teilproblems mit dem Zielwert Z_1 noch gemischtzahlige Variablenwerte auf, so wird eine weitere nichtganzzahlige Variable x_h $(h \neq l)$ herausgegriffen, die die nächste Verzweigung verursacht.

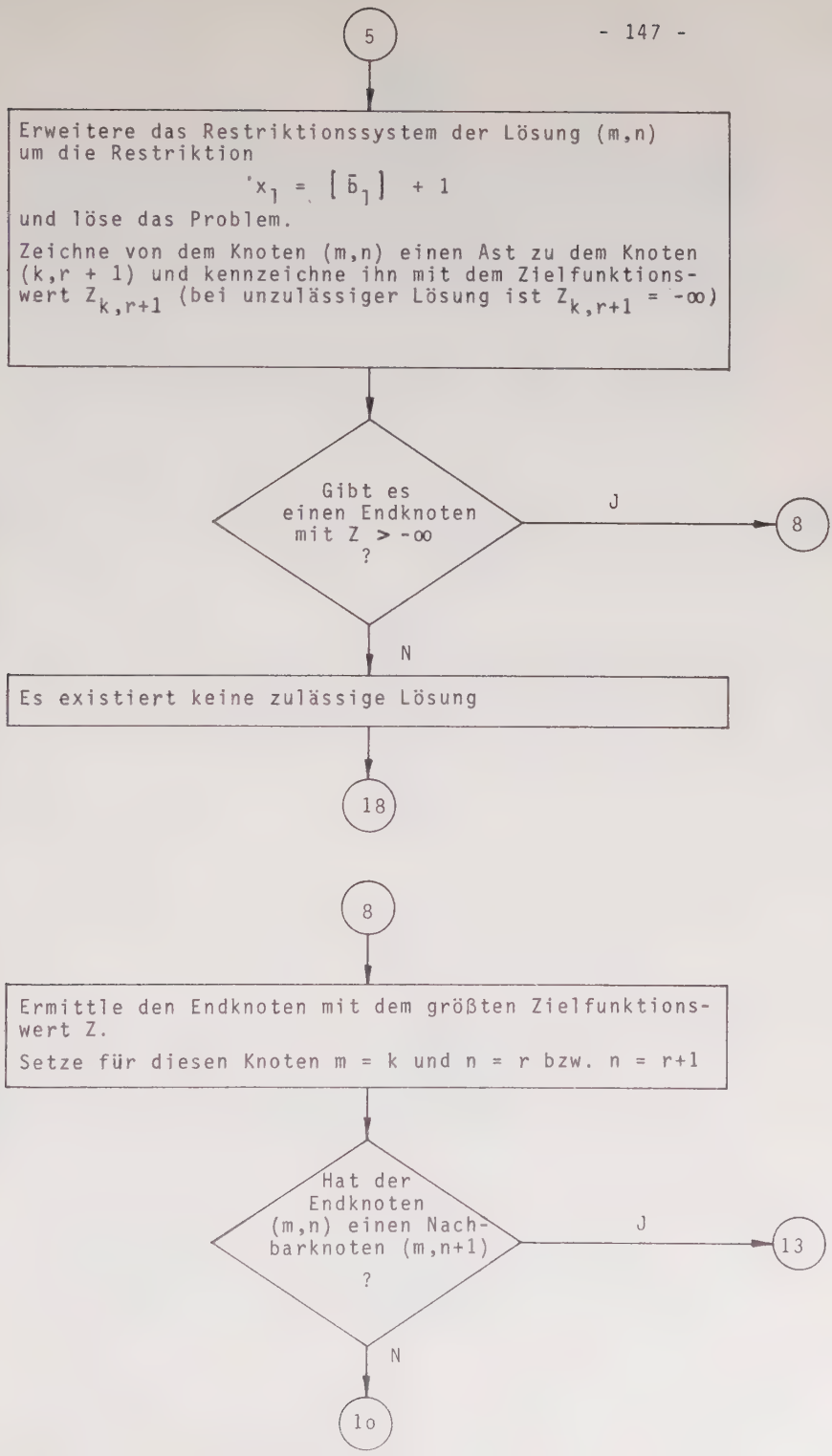
Zu dem bereits in diesem Ast gespeicherten Teilproblem werden wiederum zwei neue Teilprobleme konstruiert, indem einerseits die Restriktion $x_h = \lfloor \bar{b}_h \rfloor$ und andererseits die Beschränkung $x_h = \lfloor \bar{b}_h \rfloor + 1$ dem in diesem Ast vorhandenen Restriktionssystem hinzugefügt werden. Die auf diese Art gewonnenen - wiederum um jeweils eine Variable verkleinerten - Probleme führen vom Knoten Z_1 zu zwei neuen Ästen.
Es folgt die Berechnung der Optimalwerte der betrachteten Teilprobleme und die Prüfung auf Zulässigkeit.[1]
Mit diesen zusätzlichen Knoten wird der maximale Zielwert der zulässigen Endknoten der einzelnen Äste gesucht und die Verzweigung wird von dem Endknoten mit dem größten Zielwert in der oben beschriebenen Art fortgesetzt bis entweder eine ganzzahlige Lösung gefunden ist, deren Zielwert Z von keiner anderen ganzzahligen Lösung erreicht werden kann, oder nur noch unzulässige Endknoten existieren, die die Unlösbarkeit des Problems dokumentieren.

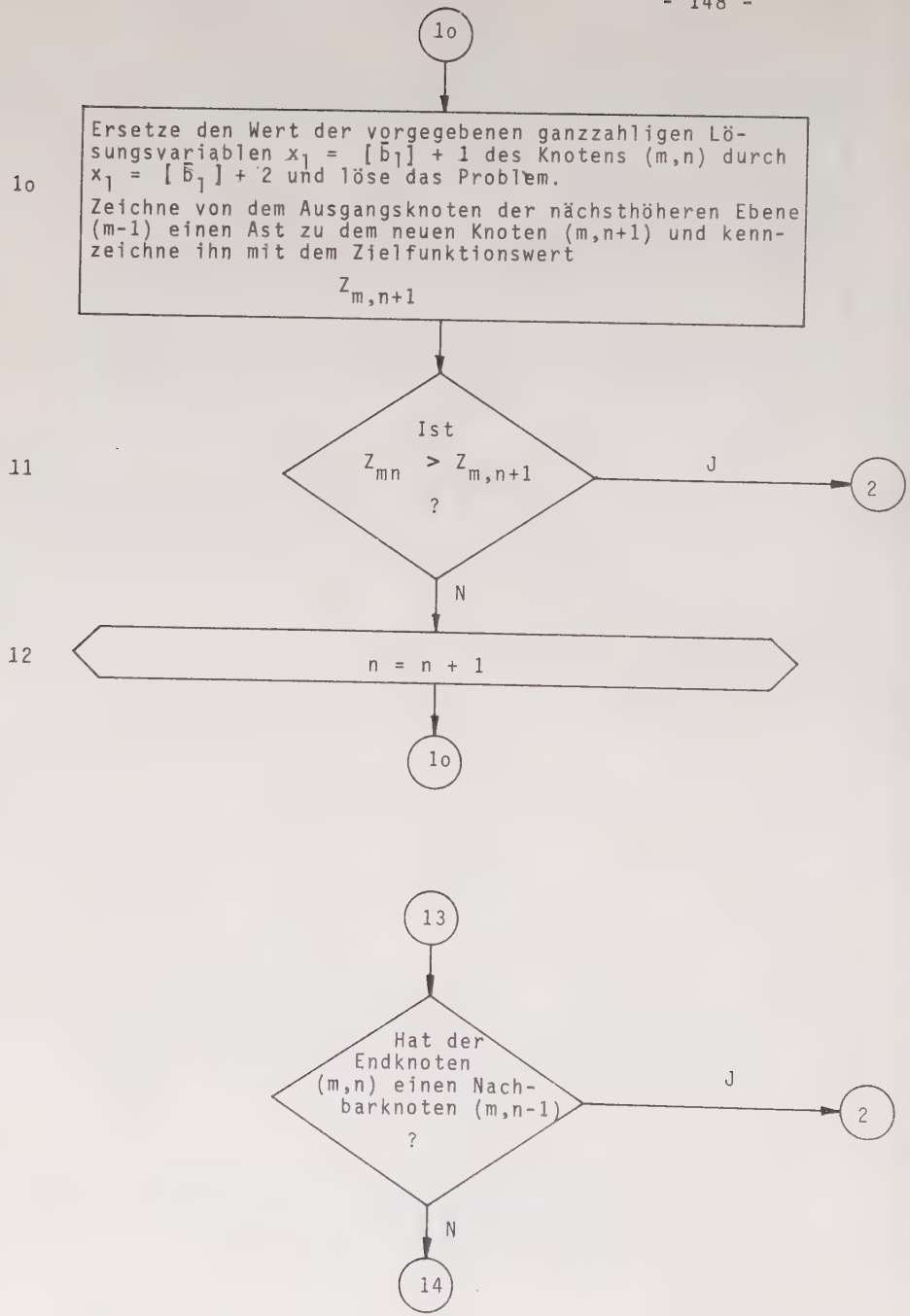
---

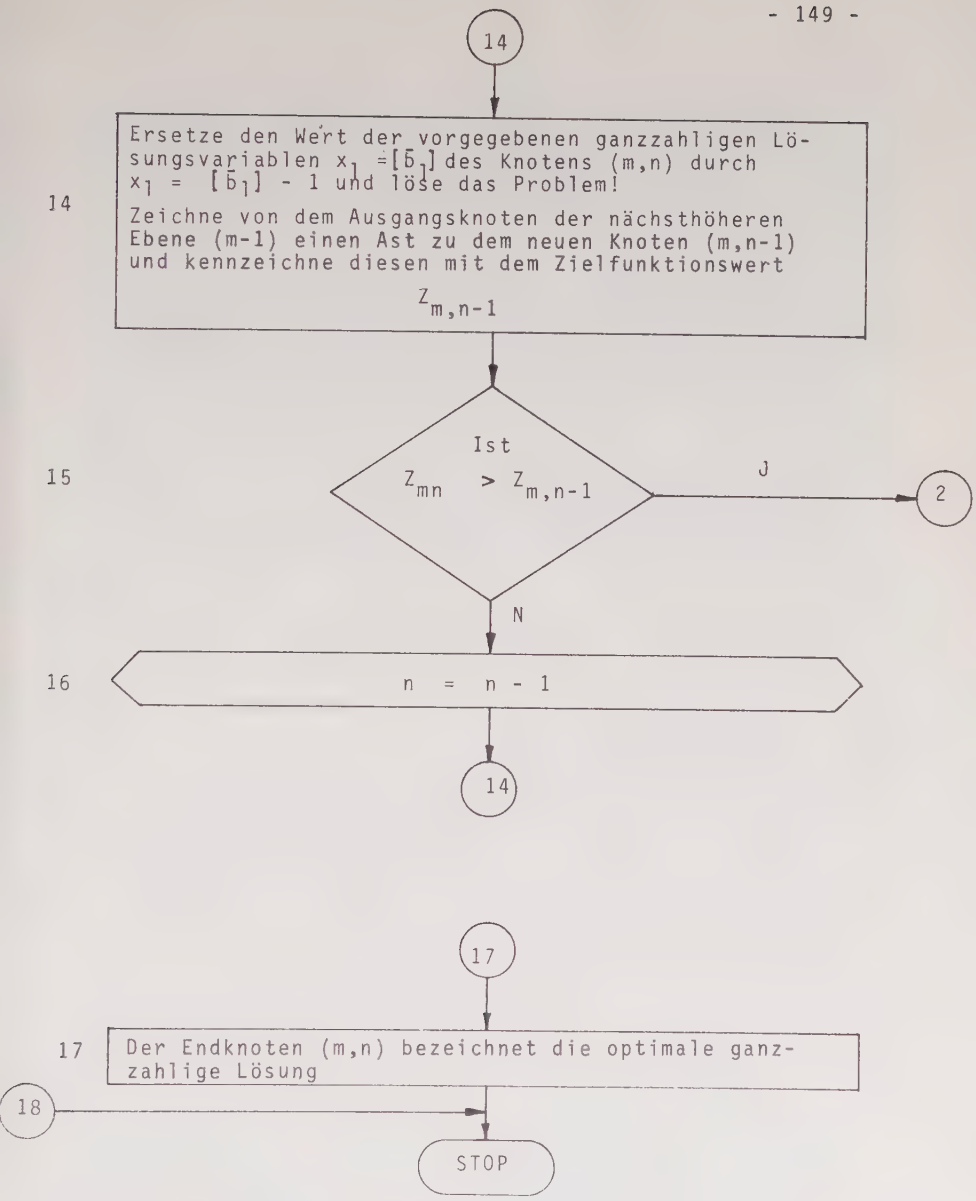
[1] Für den Endknoten mit dem maximalen Zielfunktionswert muß wiederum geprüft werden, ob zwei direkte Nachbarknoten vorhanden sind.

Flußdiagramm zum Ablauf des Verfahrens LAND and DOIG




5
Erweitere das Restriktionssystem der Lösung (m,n) um die Restriktion
$'x_1 = [\bar{b}_1] + 1$
und löse das Problem.
Zeichne von dem Knoten (m,n) einen Ast zu dem Knoten (k,r + 1) und kennzeichne ihn mit dem Zielfunktionswert $Z_{k,r+1}$ (bei unzulässiger Lösung ist $Z_{k,r+1} = -\infty$)
6
Gibt es einen Endknoten mit $Z > -\infty$?
J
8
N
7
Es existiert keine zulässige Lösung
18
8
8
Ermittle den Endknoten mit dem größten Zielfunktionswert Z.
Setze für diesen Knoten m = k und n = r bzw. n = r+1
9
Hat der Endknoten (m,n) einen Nachbarknoten (m,n+1) ?
J
13
N
1o


1o
Ersetze den Wert der vorgegebenen ganzzahligen Lösungsvariablen $x_1 = [\bar{b}_1] + 1$ des Knotens (m,n) durch $x_1 = [\bar{b}_1] + 2$ und löse das Problem.
Zeichne von dem Ausgangsknoten der nächsthöheren Ebene (m-1) einen Ast zu dem neuen Knoten (m,n+1) und kennzeichne ihn mit dem Zielfunktionswert
$Z_{m,n+1}$
1o
Ist
$Z_{mn} > Z_{m,n+1}$
?
11
J
2
N
12
n = n + 1
1o
13
Hat der Endknoten (m,n) einen Nachbarknoten (m,n-1)
?
J
2
N
14



Definition: Endknoten = Knoten, von dem kein Ast zu einer tiefer liegenden Ebene führt.

43222 Beurteilung des Verfahrens LAND and DOIG

Da das Verfahren von LAND and DOIG als systematisches Suchverfahren bezeichnet werden kann, das die gemischtzahligen Variablen auf einen ganzzahligen Wert festlegt und somit eine ganzzahlige Lösung sucht, wird die Endlichkeit des Verfahrens durch die begrenzte konvexe Lösungsmenge gesichert, so daß bei Vorhandensein zulässiger ganzzahliger Lösungspunkte auch das ganzzahlige Optimum mit einer endlichen Anzahl von Iterationen errechnet werden kann.

Der Vorteil des Verfahrens liegt - im Gegensatz zu vielen Schnitthyperebenenverfahren - darin, daß in der Regel ganzzahlige suboptimale Lösungen berechnet werden können und damit oft schon nach relativ wenigen Iterationsschritten wertvolle Informationen zur Verfügung stehen.

Der Rechenaufwand des Verfahrens hängt wesentlich von der Iterationshäufigkeit ab.
Zunächst einmal werden zur Berechnung des gemischtzahligen Optimums die bekannten Simplexiterationen durchgeführt. Durch die feste Fixierung einer Variablen bei jedem Branch reduzieren sich die zu lösenden Teilprobleme stets um eine Variable und somit verkleinert sich das Tableau um eine Spalte.
Da die Ganzzahligkeitsrestriktion nur die rechte Seite und damit lediglich die konstanten Werte des Tableaus berührt[1,2], werden die Pivotoperationen zwar reduziert,

---

[1] Von der Streichung der Spalte der ganzzahlig gemachten Variablen sei abgesehen.

[2] Da durch den Verzweigungsschritt keinerlei Koeffizientenveränderungen auftreten und weiterhin bei Verwendung der Simplexmethode stets auf alte Ausgangstableaus zurückgegangen wird, werden sich die Rundungsfehler, die zunächst durch die Berechnung des gemischtzahligen Optimums entstehen, nicht kumulieren.

dennoch können durch die stete Neuberechnung der Teilprobleme die Rechenzeiten bei größeren Problemen schnell an die wirtschaftlich vertretbare Grenze stoßen.

Ein noch wesentlicherer Nachteil des Verfahrens muß in der hohen Speicherintensität gesehen werden. Schon bei einer übersehbaren Anzahl von Hauptvariablen kann die Breite des Verzweigungsbaumes und damit die Erzeugung einer großen Zahl von Lösungsknoten, die wegen der Prüfung der Optimalität überwiegend gespeichert werden müssen[1], einen dermaßen großen Speicherbedarf erfordern, daß die Anwendung des Verfahrens auf praktische ökonomische Probleme - wie z.B. Investitions- und Finanzierungsprobleme - in der dargestellten Form nicht empfehlenswert erscheint[2].

---

[1] Für jeden Knoten, der nicht sofort verworfen werden kann, müssen die Lösungswerte, die Variablen des Knotens, dessen Zielwert sowie zumindest die effizienten Knoten vorgelagerter Ebenen gespeichert werden.

[2] Vgl. auch BALINSKI, M.L.: Integer Programming: Methods, Uses, Computation, a.a.O., S. 266. LINDNER, L.: Grundlagen und Bedeutung von Algorithmen zur ganzzahligen linearen Programmierung, a.a.O., S. 166. STÜHR, R.: Anwendungen und Lösungsverfahren der ganzzahligen linearen Programmierung, a.a.O., S. 180.

Verbindet man die Auswahl der Variablen mit der damit verbundenen Zielwertreduktion, können in verschiedenen Fällen Bounds gefunden werden, die den Rechenprozeß verkürzen[1].

Da die Berechnung restriktiv wirkender Auswahlregeln gegebenenfalls recht umständlich sein kann, ist eine Einsparung des Rechenaufwandes jedoch nicht immer garantiert[2].

Außerdem setzt die Anwendung der Auswahlregeln bei Einhaltung geringer Rechenzeiten einen derart großen Kernspeicherbedarf voraus, daß nur bei größeren EDV-Anlagen die Verwendung derartige Regeln zur Diskussion stehen kann.

4323 Verfahren DAKIN

43231 Beschreibung des Verfahrens

Das Verzweigungsverfahren von DAKIN[3] ähnelt im Aufbau dem Verfahren von LAND and DOIG; durch eine einfachere Handhabung[4] können jedoch im allgemeinen kürzere Rechenzeiten bei geringerem Speicheraufwand erzielt werden.

---

1 Derartige Auswahlregeln siehe bei GREENBERG, H.: Integer Programming, New York, London 1971, S. 177 ff. ROY, B. u.a.: From S.E.P. Procedure to the Mixed Ophelie Program. In: Integer and Nonlinear Programming. Hrsg. v. J. ABADIE. Amsterdam-London 197o, S. 419-436, bes. S. 42o ff.

2 Vgl. LINDNER, L.: Grundlagen und Bedeutung von Algorithmen zur ganzzahligen linearen Programmierung, a.a.O., S. 167.

3 Vgl. DAKIN, R.J.: A Tree-Search Algorithm for Mixed Integer Programming Problems. In: The Computer Journal, Vol. 8 (1965), S. 25o-255.

4 Vgl. DAKIN, R.J.: A Tree-Search Algorithm for Mixed Integer Programming Problems, a.a.O., S. 25o.

Die Idee des Verfahrens besteht in der Aufspaltung der gesamten gemischtzahligen Lösungsmenge in disjunkte Teilmengen, für die jeweils das Optimum bestimmt wird. Durch die Berechnung der optimalen Zielwerte der Teilprobleme erhält man Gewinnobergrenzen für die einzelnen Teillösungen (Bounds), die über die Reihenfolge der Weiterverzweigung und somit über die Struktur des aufzubauenden Baumes entscheiden. Besondere Bedeutung erhalten dabei die Knoten mit lediglich ganzzahligen Lösungswerten, da wegen der ausschließlichen Berechnung von Teilproblemen des Ausgangsmodells von den optimalen Zielwerten ganzzahliger Teillösungen auf das Optimum des Gesamtproblems geschlossen wird, so daß die Optimierung der Teilprobleme gleichzeitig die ganzzahlige optimale Lösung des Ausgangsproblems liefert.

Während die Verzweigungsschritte beim Verfahren LAND and DOIG durch die zusätzlichen Restriktionen $x_l = [\bar{b}_l]$ und $x_l = [\bar{b}_l] + 1$; $l \in i$ für die betrachteten Variablen die Ganzzahligkeit explizit fordern, verkleinert das Verfahren DAKIN den zulässigen Lösungsbereich sukzessive durch die zusätzlichen Restriktionen $x_l \leqq [\bar{b}_l]$ und $x_l \geqq [\bar{b}_l] + 1$, wodurch stets zwei Teilprobleme geschaffen werden, die zu optimieren sind[1]. Somit erhält man zwei neue Bounds, die die Obergrenzen für die Zielfunktionswerte der betrachteten Teilprobleme angeben.

Durch diese Vorgehensweise wird ein Sektor aus dem kontinuierlichen Beschränkungsraum geschnitten, der keine ganzzahligen Lösungspunkte enthält und somit der weiteren Betrachtung entzogen werden kann.
Im zweidimensionalen Raum läßt sich die Aufspaltung des Problems in zwei Teilprobleme folgendermaßen veranschaulichen:

---

[1] Da beim Verfahren DAKIN die einzelnen Variablen schrittweise zu ganzzahligen Werten hingeführt werden, eignet sich dieses Verfahren auch besonders für gemischt-ganzzahlige Probleme.

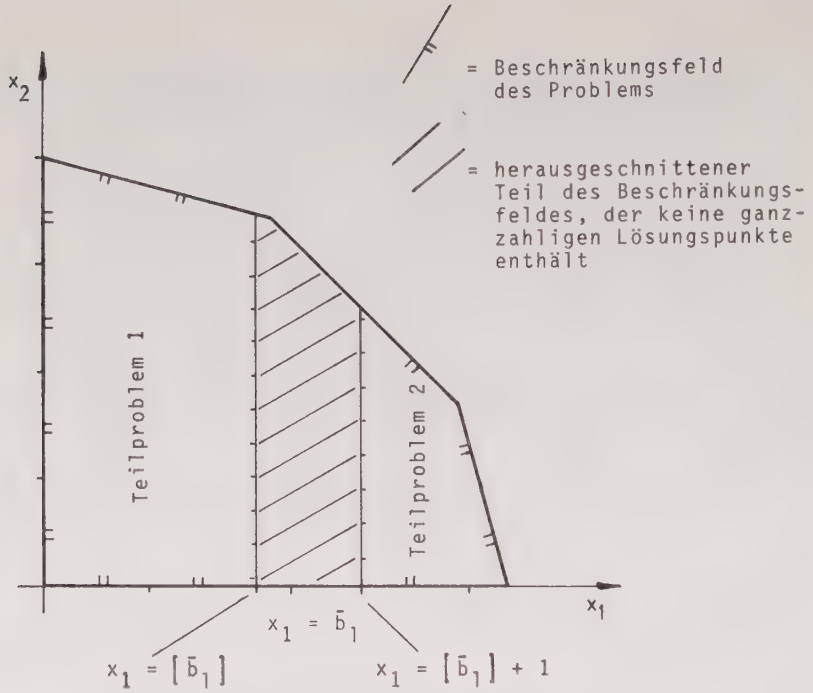


Abb. 5

Durch die bei DAKIN vorgenommene Verzweigung werden ausgehend von einem Knoten genau zwei weitere Äste gebildet, wogegen bei LAND and DOIG eine wesentlich breitere Verzweigung mit vielen parallelen Knoten erforderlich werden kann. Die Art des Branches beim DAKIN-Verfahren bringt den Vorteil, daß durch die Aufteilung der gesamten Lösungsmenge in zwei disjunkte Teilmengen das ganzzahlige Optimum - bei Existenz eines ganzzahligen Optimums - in einer der beiden Teilmengen enthalten ist.

Wegen der Aufspaltung der konvexen Lösungsmenge in wiederum reduzierte konvexe Teillösungsmengen bildet auch der ganzzahlige optimale Lösungsvektor einen Eckpunkt des reduzierten Beschränkungspolyeders[1].

Dieser Sachverhalt hat zur Folge, daß durch die ausschließliche Betrachtung der Eckpunkte des Beschränkungsraumes die reguläre oder auch die duale Simplexmethode zur Lösung des Problems Anwendung finden kann.

Dabei wachsen die durch die Verzweigung erzeugten Tableaus der Teilprobleme jeweils um die hinzugefügte künstliche Restriktionszeile, während die Zahl der Problemvariablen im Gegensatz zum Verfahren von LAND and DOIG konstant bleibt.

Der Ablauf des Verfahrens sei im folgenden aus Gründen der Ähnlichkeit mit dem Ablauf des Verfahrens von LAND and DOIG nur kurz dargestellt.
Ausgehend von einer gemischtzahligen Optimallösung wird aus dem optimalen Lösungsvektor, der nicht der Ganzzahligkeitsbedingung unterliegen soll, eine Variable x_l; $l \notin G$ herausgegriffen[2] und das ursprüngliche Problem in zwei Teilprobleme durch Hinzufügung einerseits der Restriktion $x_l \leqq [\bar{b}_l]$ und andererseits $x_l \geqq [\bar{b}_l] + 1$ aufgespalten und anschließend optimiert.

---

[1] Von dem Sonderfall der Mehrfachlösungen soll bei dieser Betrachtung abgesehen werden.

[2] Die Schreibweise x_l; $l \notin G$ besagt, daß der betrachtete Lösungswert der Variablen x_l nichtganzzahlig ist.

Durch die Einführung der zusätzlichen Restriktionen wird die alte Optimallösung unzulässig, so daß zur Wiederherstellung der primalen Zulässigkeit und damit zur Lösung der neuen Teilprobleme die duale Simplexmethode Anwendung finden kann[1].

Die Optimierung eines Teilproblems liefert einen neuen Bound, der mit dem eine Ebene höher gelegenen erzeugenden Knoten verbunden wird, so daß durch die Verzweigung ein Baum mit Ästen aufgebaut wird.
Sind die errechneten Lösungsvektoren zulässig, aber nichtganzzahlig, wird der bisher berechnete maximale Bound, d.h. der zulässige nichtganzzahlige Endknoten mit dem größten Zielfunktionswert aufgesucht[2].

---

[1] Die Anwendung der dualen Simplexmethode erfordert die Speicherung des gesamten Tableaus des die Verzweigung verursachenden Knotens, da mit diesem Tableau weitergerechnet wird. Das Tableau kann erst dann überschrieben werden, wenn der betrachtete neue Knoten einen zulässigen oder unzulässigen Endknoten des Astes darstellt und der Alternativknoten bereits berechnet wurde.
Um den dadurch bedingten großen Speicheraufwand zu vermeiden, kann das Unterproblem auch mit der regulären oder revidierten Simplexmethode gelöst werden, indem das Ausgangsproblem mit den bis zu diesem Knoten in direkter Linie angefallenen zusätzlichen Restriktionen optimiert wird. Die Anzahl der Iterationsschritte wird im Vergleich zur Anwendung der dualen Simplexmethode ungleich größer, jedoch wird der Speicherbedarf erheblich geringer, da in jedem Knoten nur die für die Betrachtung notwendigen zusätzlichen künstlichen Restriktionen gespeichert sind.

[2] BURKARD empfiehlt bei Verwendung von EDV-Anlagen aus Speicherplatzgründen von der beschriebenen Verzweigungsregel abzugehen und den Ast ausgehend von einem Knoten so lange zu verfolgen, bis eine ganzzahlige Lösung erhalten wird bzw. die Nichtexistenz einer ganzzahligen Lösung nachgewiesen ist. Vgl. BURKARD, R.E.: Methoden der ganzzahligen Optimierung, a.a.O., S. 181. Zum Problem einer wirksamen Auswahlregel vgl. Kapitel 43234.

Von dort setzt sich die Verzweigung in der Form fort, daß eine andere nichtganzzahlige Variable x_h; $h \in G$ in der oben beschriebenen Form jeweils eine weitere Restriktion für die beiden neu zu optimierenden Teilprobleme zusätzlich liefert.
Ein Ast endet, wenn der betrachtete Bound eine zulässige ganzzahlige Lösung darstellt, eine unzulässige Lösung errechnet wird oder eine ganzzahlige zulässige Lösung bereits existiert, deren Zielwert größer als der des betrachteten Bounds ist, so daß bei einem anderen Ast weiterverzweigt wird.
Das Verfahren bricht ab, wenn es keinen Knoten mehr gibt, der eine weitere Verzweigung im Sinne des Verfahrens gestattet.

Die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens[1] hängt im wesentlichen von der Art der Verzweigung ab, da die Struktur des aufzubauenden Baumes von der jeweiligen Auswahl der nichtganzzahligen Basisvariablen bestimmt wird.

Bei der Durchrechnung per Hand gewinnt die Auswahl der zusätzlichen Restriktion keine Bedeutung; jedoch muß bei der Verwendung von EDV-Anlagen eine Regel angegeben werden, die die nichtganzzahlige Basisvariable für die künstlich zu erzeugende Restriktion fixiert.

Eine generelle Vorschrift existiert nicht, so daß für die auszuwählende Variable "eine gewisse Freiheit besteht"[2].

---

[1] Die Endlichkeit ist aufgrund des "Suchcharakters" des Verfahrens gesichert, so daß bei Vorhandensein einer zulässigen ganzzahligen Lösung diese mit einer endlichen Anzahl von Iterationen berechnet werden kann.

[2] BURKARD, R.E.: Methoden der ganzzahligen Optimierung, a.a.O., S. 182.

Dennoch gibt es Auswahlregeln, die eine schnellere Konvergenz des Verfahrens erwarten lassen.
DAKIN[1] hat an Hand einer Tabelle eine Vorgehensweise vorgeschlagen, die für die Verwendung von EDV-Anlagen praktikabel erscheint[2].

In einer Tabelle werden alle restriktiv wirkenden künstlichen Beschränkungen aufgeführt, bei denen jeweils vermerkt wird, welchen Verzweigungsschritt die angesprochene Variable verursacht hat (Nummer des Knotens) und ob die entsprechende Verzweigungsalternative bereits vorher realisiert wurde oder nicht. Es wird dann solange derselbe Ast weiter verfolgt, bis auf eine ganzzahlige zulässige bzw. unzulässige Lösung gestoßen wird. In letzterem Fall setzt die noch freie Alternative die Verzweigung in der beschriebenen Art fort. Der Prozeß ist beendet, wenn eine weitere Verzweigung eines Knotens nicht mehr möglich ist.
Ein anderes Auswahlkriterium erhält man, wenn die durch den Verzweigungsschritt verursachte Zielwertänderung mit zur Entscheidung über die Verzweigung der Knoten herangezogen wird[3].

DAKIN[4] schlägt dann die Auswahl der Variablen zur Bildung der künstlichen Restriktion vor, die bei der Durchführung des ersten Iterationsschrittes der dualen Simplexmethode die größte Zielwertänderung verursacht.

---

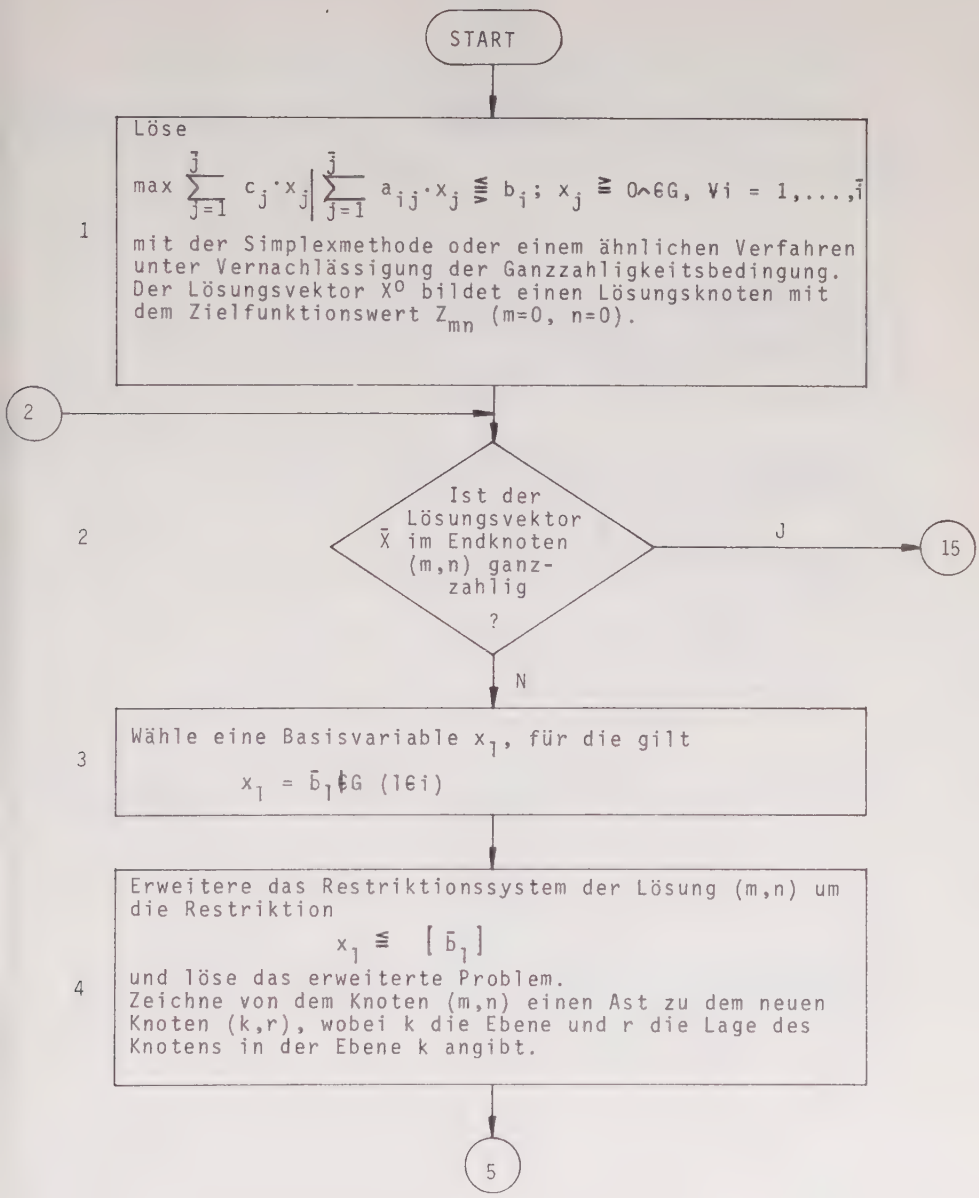
1 Vgl. DAKIN, R.J.: A Tree-Search Algorithm for Mixed Integer Programming Problems, a.a.O., S. 251 f.

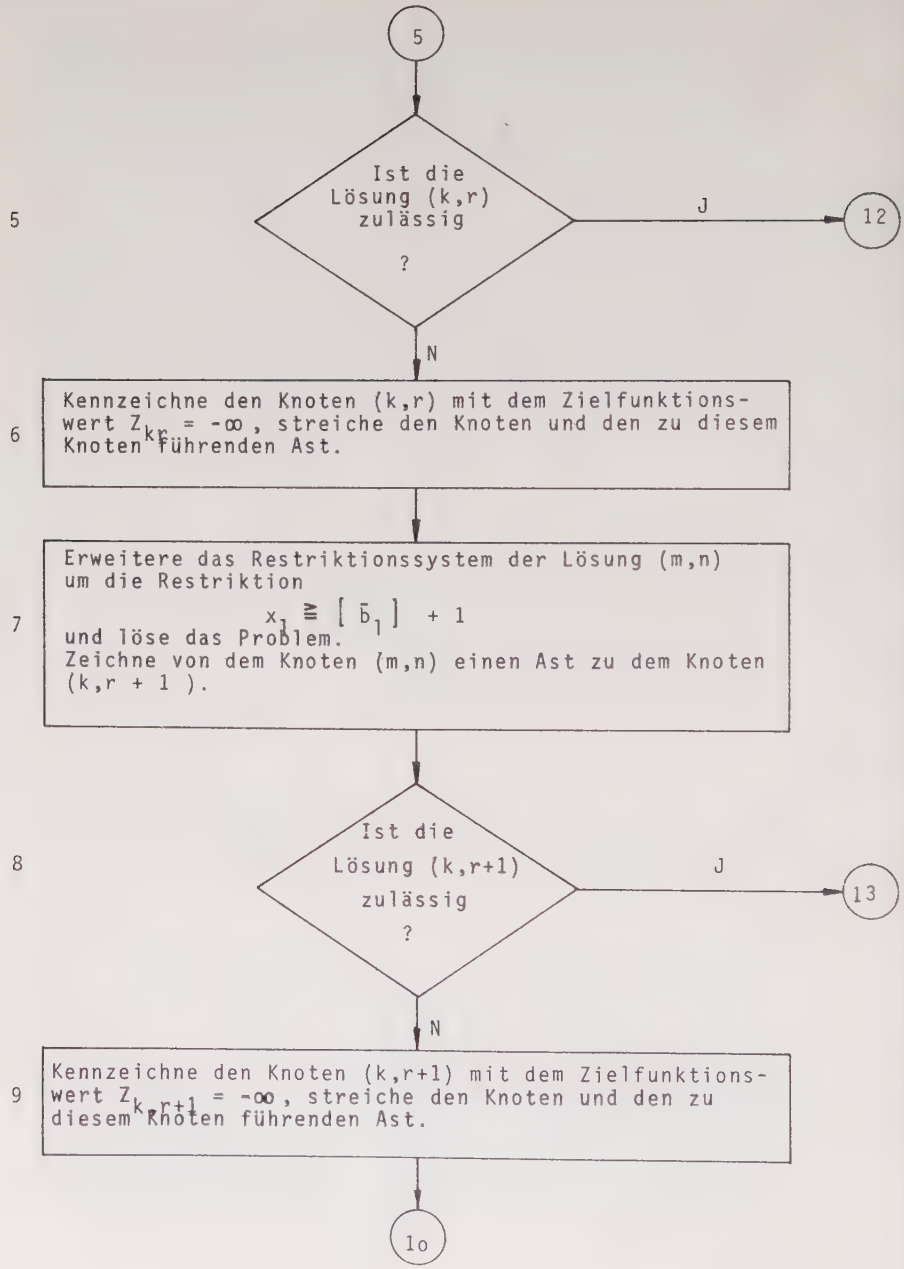
2 Vgl. DAKIN, R.J.: A Tree-Search Algorithm for Mixed Integer Programming Problems, a.a.O., S. 252.

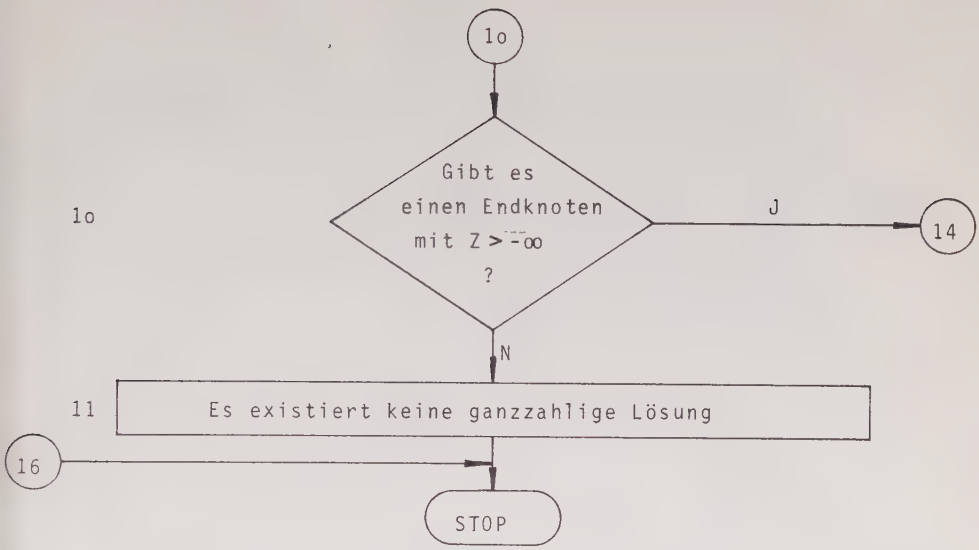
3 Vgl. nähere Ausführungen zum Aufbau des Baumes im Kapitel 43233.

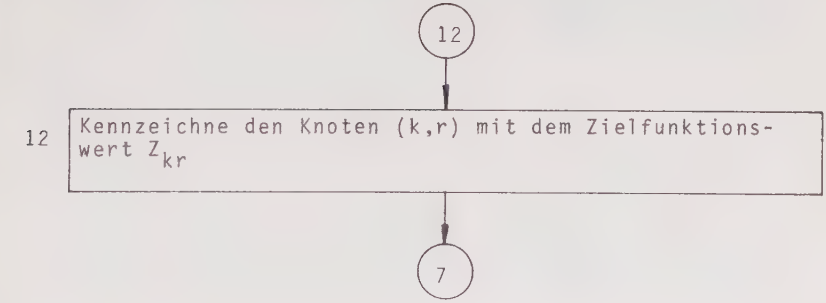
4 Vgl. DAKIN, R.J.: A Tree-Search Algorithm for Mixed Integer Programming Problems, a.a.O., S. 253.

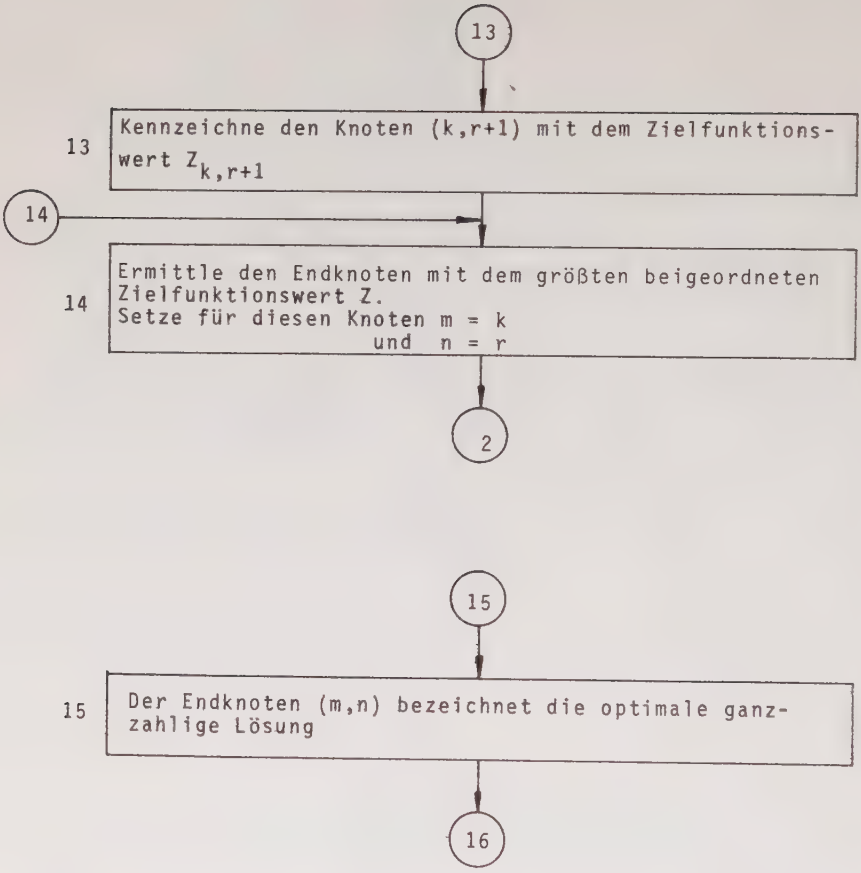
Flußdiagramm zum Ablauf des Verfahrens DAKIN




5
Ist die Lösung (k,r) zulässig ?
J
12
N
6
Kennzeichne den Knoten (k,r) mit dem Zielfunktionswert $Z_{kr} = -\infty$, streiche den Knoten und den zu diesem Knoten führenden Ast.
7
Erweitere das Restriktionssystem der Lösung (m,n) um die Restriktion
$x_1 \geq [\bar{b}_1] + 1$
und löse das Problem.
Zeichne von dem Knoten (m,n) einen Ast zu dem Knoten (k,r + 1).
8
Ist die Lösung (k,r+1) zulässig ?
J
13
N
9
Kennzeichne den Knoten (k,r+1) mit dem Zielfunktionswert $Z_{k,r+1} = -\infty$, streiche den Knoten und den zu diesem Knoten führenden Ast.
1o


1o
1o
Gibt es einen Endknoten mit Z > -∞ ?
J
14
N
11
Es existiert keine ganzzahlige Lösung
16
STOP


12
12
Kennzeichne den Knoten (k,r) mit dem Zielfunktionswert Z_{kr}
7



k = Ebene des Knotens

r = Lage des Knotens in der Ebene k

43232 Beurteilung des Verfahrens DAKIN

Durch die Einführung zusätzlicher künstlicher Restriktionen in das kontinuierliche Problem, wodurch nichtganzzahlige Teile der ursprünglichen Lösungsmenge eliminiert werden, schafft das Verfahren DAKIN jeweils reduzierte Teilprobleme, deren Optimallösungen die weitere Verzweigung in dem Entscheidungsbaum bestimmen.

Der Unterschied zum Verfahren LAND and DOIG liegt in der Struktur der zu bildenden Teilmengen. Das Verfahren LAND and DOIG arbeitet parallel, indem nacheinander den Variablen unterschiedliche ganzzahlige Werte zugeordnet und die dazu gehörigen Programme untersucht werden. Durch die damit verbundene Lösung vieler Unterprogramme auf einer Verzweigungsebene, deren Tableaus gespeichert werden müssen, kann man einen stark verästelten Baum erhalten, der viel Speicherkapazität erfordert[1].

Dagegen verzweigt das Verfahren DAKIN sequentiell. Die Aufspaltung der Lösungsmenge eines Knotens in genau zwei disjunkte Teilmengen hat dabei den Vorteil, daß der optimale Ganzzahligkeitspunkt Element einer der beiden zu betrachtenden Teilmengen ist.

---

[1] Die parallele Verzweigung garantiert jedoch, daß lediglich $\bar{j}$-Ebenen ($\bar{j}$ = Anzahl der ganzzahlig geforderten Variablen) zu betrachten sind, während beim Verfahren DAKIN die Ersetzung künstlicher Restriktionen durch restriktiver wirkende Beschränkungen eine größere Zahl von Verzweigungsebenen erwarten läßt.

Über den Rechenaufwand des DAKIN-Verfahrens können keine allgemeingültigen Aussagen getroffen werden, da die Problemstruktur weitgehend mitbestimmend ist[1].

Bei der Verwendung der dualen Simplexmethode zur Lösungsfindung sind - wie erwähnt - jeweils die Optimaltableaus der gültigen Knoten zu speichern, da bei Hinzufügung einer weiteren zusätzlichen Restriktion von der Lösungskonstellation des die Restriktion erzeugenden Knotens ausgegangen wird.

Werden die neuen Knoten jedoch mit der regulären oder revidierten Simplexmethode errechnet, brauchen nur das gemischtzahlige Optimaltableau und die zu den einzelnen Knoten hinführenden zusätzlichen Restriktionen gespeichert zu werden.
Da der neue Knoten in diesem Fall eine völlige Neuberechnung unter zusätzlicher Berücksichtigung des ursprünglichen Beschränkungssystems erfährt, werden wesentlich mehr Iterationsschritte als bei der alternativen Lösungsmöglichkeit erforderlich, so daß die Rechenzeit negativ beeinflußt wird. Durch das stete Zurückgreifen auf das ursprüngliche System wird jedoch eine zusätzliche Kumulation von Rundungsfehlern vermieden.

Die Rechenzeit bestimmt sich weitgehend nach der Anzahl der Iterationsschritte zur Berechnung der Lösungen der einzelnen Knoten sowie der Anzahl der Knoten, so daß die benötigte Rechenzeit auch in starkem Maße von der Problemstrukturierung abhängt.

---

[1] Vgl. auch LINDNER, L.: Grundlagen und Bedeutung von Algorithmen zur ganzzahligen linearen Programmierung, a.a.O., S. 176.

Die Speicherintensität des Verfahrens einerseits und die begrenzten Speicherkapazitäten andererseits bringen die Notwendigkeit, nach Verzweigungs- und Abbruchkriterien zu suchen, die möglichst frühzeitig große nichtganzzahlige Teile der Lösungsmenge eliminieren[1]. Ziel des Algorithmus muß es daher sein, in einer frühen Verzweigungsphase einen ganzzahligen Bound mit einem günstigen Zielwert zu finden, so daß schlechtere Knoten frühzeitig verworfen werden können und der Verzweigungsumfang in Grenzen gehalten wird.

43233 Modifikation zum Verfahren DAKIN

Bei Maximierungsproblemen mit ausschließlich 'kleiner/gleich' Beziehungen kann beim DAKIN-Verfahren auf zwei unterschiedliche Arten relativ schnell ein ganzzahliger Bound mit einem Zielwert gefunden werden, der als erste Unterschranke für das ganzzahlige Problem angesehen werden kann:

Betrachtet man lediglich die Äste des Baumes, bei denen dem Ausgangsproblem die Restriktionen $x_1 \leqq [\bar{b}_1]$ hinzugefügt werden, so beinhalten die errechneten Knoten stets zulässige Lösungen, die jedoch nicht unbedingt ganzzahlig sein müssen.

Der Ast eines Zweiges wird solange nach obiger Regel weiterverzweigt, bis eine ganzzahlige Lösung errechnet ist[2].

---

[1] Vgl. auch dazu Kapitel 43233.

[2] Bei den unterstellten Prämissen ist die Existenz einer ganzzahligen Lösung garantiert, da der Ursprung des Koordinatensystems einen ganzzahligen zulässigen Lösungspunkt bildet, der jedoch in der Regel einen schlechten Bound liefert.

Der Zielwert dieser Lösung bildet eine Unterschranke für das zu lösende Problem, die als zusätzliche Nebenbedingung in das Modell aufgenommen wird. Somit können alle Äste, die von anderen Knoten ausgehen und deren Zielwert kleiner als der Zielwert der eben berechneten ganzzahligen Lösung ist, sofort verworfen werden.

Diese Erkenntnis, die jedoch nur bei Maximierungsproblemen mit ausschließlich 'kleiner/gleich' Beziehungen gilt, kann den notwendigen Speicheraufwand und somit den Rechenaufwand erheblich reduzieren.

Eine zweite Möglichkeit, möglichst schnell für das Problem eine Unterschranke zu finden, die ebenfalls vorerst nur bei Maximierungsproblemen mit ausschließlich 'kleiner/gleich' Restriktionen existiert, besteht darin, die gemischtzahligen optimalen Lösungswerte des Vektors $X^o = (b_1^o,\ldots,b_i^o)$ auf $[\hat{X}^o] = ([b_1^o],\ldots,[b_i^o])$ abzurunden.

Bei dem oben angesprochenen Problem bildet der Lösungsvektor $[X^o]$ aus Gründen der Konvexität der Lösungsmenge in jedem Falle eine zulässige ganzzahlige Lösung. Der Zielwert dieser Lösung kann dem Modell als zusätzliche Restriktion beigegeben werden, so daß auch hier Lösungsknoten mit einem kleineren Zielwert von vornherein verworfen werden. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, daß ohne die weitere Vornahme einer zusätzlichen Iteration bzw. Verzweigung die gemischtzahlige Optimallösung gleichzeitig eine zulässige ganzzahlige Lösung liefert, deren Zielwert durch Einsetzen der ganzzahligen Lösungswerte in die Zielfunktion leicht zu ermitteln ist.

Bei Minimierungsproblemen läßt sich ebenfalls durch eine analoge Vorgehensweise sofort ein ganzzahliger Bound finden.

Der auf diese Art gefundene Zielwert kann jedoch erst dann als restriktiver Bound für das Problem verwendet werden, wenn die entsprechenden Variablenwerte der Menge der zulässigen Lösungen angehören.

Eine weitere Modifikation des DAKIN-Verfahrens, die sich auf die Auswahl der die Verzweigung verursachenden nichtganzzahligen Basisvariablen und die Berechnung eines günstigeren Bounds, der schlechtere Lösungen frühzeitig eliminiert, bezieht, geht auf eine Idee von DRIEBEEK[1] zurück[2].

---

[1] Vgl. DRIEBEEK, N.J.: An Algorithm for the Solution of Mixed Integer Programming Problems, a.a.O., S. 576-587. Vgl. auch KORTE, B.: Ganzzahlige Programmierung - Ein Überblick. In: Unternehmensforschung heute. Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems. Hrsg. v. M. BECKMANN, u.a., Bd.5o, Berlin-Heidelberg-New York 1971, S. 85 ff. GREENBERG, H.: Integer Programming, a.a.O., S. 179 ff.

[2] Dieses modifizierte Verfahren eignet sich besonders für Probleme mit wenigen ganzzahlig geforderten Variablen.

Zu berechnen sind sogenannte Pseudokosten - auch Strafkosten bzw. penalty costs genannt - die entstehen, wenn eine nichtganzzahlige Basisvariable x_l eine Verzweigung einmal in der Form $x_l \leqq [\bar{b}_l]$ oder andererseits mit $x_l \geqq [\bar{b}_l] + 1$ verursacht.

Diese Pseudokosten drücken die Zielwertveränderungen aus, die durch die entsprechende Art der Verzweigung bei der betrachteten Variablen entstehen.

Soll die Variable $x_l = ([\bar{b}_l] + \{\bar{b}_l\})$; $x_l \notin G$, $l \in i$ - wobei $\{\bar{b}_l\}$ den gebrochenen Teil des Lösungswertes $\bar{b}_l$ angibt - in einem Tableau $\bar{T}$ die Verzweigung durch $x_l \leqq [\bar{b}_l]$ verursachen, so ist dies nur möglich, wenn mindestens ein $\bar{a}_{lj} > 0$ existiert.
Für die Nichtbasisvariable x_j, die im nächsten Tableau durch obigen Verzweigungsschritt zusätzlich Basisvariable würde, läßt sich der Lösungswert

$$x_j = \frac{\{\bar{b}_l\}}{\bar{a}_{lj}} > 0; \qquad \bar{a}_{lj}, \ \{\bar{b}_l\} > 0$$

angeben.

Berücksichtigt man den Schattenpreis $\bar{c}_j$ der Nichtbasisvariablen x_j, ergibt sich aufgrund der Auswahl der Zusatzrestriktion $x_l \leqq [\bar{b}_l]$ somit eine Zielwertänderung von

(432331)

$$\Delta Z_{[\bar{b}_l]} = -\frac{\{\bar{b}_l\}}{\bar{a}_{lj}} \cdot \bar{c}_j < 0; \qquad \bar{a}_{lj} > 0$$

Wird dagegen $x_1 \geq (\lfloor \bar{b}_1 \rfloor + 1)$, $x_1 \notin G$, $1 \in i$ für den nächsten Verzweigungsschritt ausgewählt, so gilt analog, daß bei Unterstellung mindestens eines $\bar{a}_{1j} < 0$ der Zielwert eine Änderung von

(432332)

$$\Delta Z_{(\lfloor \bar{b}_1 \rfloor + 1)} = -(1-\{\bar{b}_1\}) \cdot \frac{\bar{c}_j}{-\bar{a}_{1j}} < 0; \quad \bar{a}_{1j} < 0$$

erfährt.

Da bei Maximierungsproblemen zunächst ein möglichst großer ganzzahliger Bound gefunden werden soll, wird die jeweils minimale absolute Zielwertänderung[1] beider Verzweigungsalternativen berechnet.

Für die Alternative $x_1 \leq \lfloor \bar{b}_1 \rfloor$ ergibt sich als minimale Zielwertänderung

(432331a)

$$\Delta Z_{(11)} = -\{\bar{b}_1\} \cdot \min_j \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{1j}} ; \bar{a}_{1j} > 0 , j \in NBV \right\}$$

Wird dagegen die zusätzliche Restriktion $x_1 \geq \lfloor \bar{b}_1 \rfloor + 1$ betrachtet, erhält man als minimale Zielwertänderung

(432332a)

$$\Delta Z_{(12)} = -(1-\{\bar{b}_1\}) \cdot \min_j \left\{ \frac{\bar{c}_j}{-\bar{a}_{1j}} ; \bar{a}_{1j} < 0 , j \in NBV \right\}$$

---

[1] Da die Zielwertänderungen negativ sind, müßte eigentlich das Maximum gesucht werden. Die folgende Schreibweise erfüllt jedoch auch den angestrebten Tatbestand.

Solange noch keine zulässige ganzzahlige Lösung gefunden ist, richtet sich der Verzweigungsschritt bei der ausgewählten Basisvariablen x_l nach der minimalen Zielwertänderung, die durch die zu konstruierende zusätzliche Restriktion verursacht wird. In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit, frühzeitig einen ganzzahligen Bound mit einem relativ hohen Zielwert zu finden, größer als bei der alternative Verzweigung.

Die Verzweigung bei der Variablen x_l orientiert sich also an der minimalen Zielwertänderung[1] der Alternativen[2] (432331a) und (432332a), die mit ΔZ_l bezeichnet werden soll:

$$\Delta Z_l = \max_q \left\{ \Delta Z_{(lq)} \mid l \notin G \right\}$$

$$= \max\left\{ -\{\bar{b}_l\} \cdot \min_{\substack{j \\ \bar{a}_{lj}>0}} \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{lj}} \; ; \; -(1-\{\bar{b}_l\}) \cdot \min_{\substack{j \\ \bar{a}_{lj}<0}} \frac{\bar{c}_j}{-\bar{a}_{lj}} \;\middle|\; j \in NBV \right\}$$

---

[1] Durch die Negativität von $\Delta Z_{(lq)}$ erhält man das Minimum durch die Berechnung des Maximums.

[2] Durch die Ganzzahligkeitsforderung der Variablen und die in den meisten Fällen gegebene Nichtganzzahligkeit der Quotienten

$$\frac{\{\bar{b}_l\}}{\bar{a}_{lj}}$$

kann noch eine Verschärfung der Zielwertreduktion vorgenommen werden:

$$\Delta Z_{(11)} = -\min_j \left\{ \left(\left[\frac{\{\bar{b}_l\}}{\bar{a}_{lj}} \right] + 1 \right) \cdot \bar{c}_j ; \; \bar{a}_{lj} > 0, \; j \in NBV \right\}$$

$$Z_{(12)} = -\min_j \left\{ \left(\left[\frac{1-\{b_l\}}{\bar{a}_{lj}} \right] + 1 \right) \cdot \bar{c}_j ; \; \bar{a}_{lj} < 0, \; j \in NBV \right\}$$

Vgl. auch KORTE, B.: Ganzzahlige Programmierung - Ein Oberblick, a.a.O., S. 86.

Existiert bereits eine ganzzahlige Lösung, wird eine möglichst große Zielwertänderung durch den Verzweigungsschritt angestrebt, um schlechtere Bounds frühzeitig verwerfen zu können[1], so daß die absolute maximale Zielwertänderung ΔZ_2 bestimmt werden muß:

(432333)

$$\Delta Z_2 = \min_{q} \left\{ \Delta Z_{(1q)} \right\}$$
$$l \notin G$$

$$= \min\left\{ -\left\{\bar{b}_1\right\} \min_{\substack{j \\ \bar{a}_{1j}>0}} \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{1j}} \; ; \; -(1-\left\{\bar{b}_1\right\}) \min_{\substack{j \\ \bar{a}_{1j}<0}} \frac{\bar{c}_j}{-\bar{a}_{1j}} \;\middle|\; j \in NBV \right\}$$

Eine Verschärfung erfährt die Auswahlregel durch die Berücksichtigung der maximalen Quotienten

$$\frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{1j}} \; ; \; \bar{a}_{1j}>0 \text{ und } \frac{\bar{c}_j}{-\bar{a}_{1j}} \; ; \; \bar{a}_{1j}<0.$$

Die maximale Zielwertänderung beträgt dann

$$\Delta Z_2 = \min\left\{ -\left\{\bar{b}_1\right\} \max_{\substack{j \\ \bar{a}_{1j}>0}} \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{1j}} \; ; \; -(1-\left\{\bar{b}_1\right\}) \max_{\substack{j \\ \bar{a}_{1j}<0}} \frac{\bar{c}_j}{-\bar{a}_{1j}} \;\middle|\; j \in NBV \right\}$$

Diese Auswahlregeln gelten nicht nur für die Art des Verzweigungsschrittes einer bereits fixierten Basisvariablen, sondern können auch auf die Auswahl der Basisvariablen, die den Verzweigungsschritt verursachen soll, erweitert werden. Ist noch keine ganzzahlige Lösung gefunden, wird diejenige Basisvariable $l \mid l \in i$ und $x_l \notin G$ zur Konstruktion der künstlichen Restriktion herangezogen, für die gilt

---

[1] Vgl. auch KORTE, B.: Ganzzahlige Programmierung - Ein Überblick, a.a.O., S. 87.

(432334)

$$Z_1 = \max_{\substack{i \\ i \notin G}} \max_{q} \left\{ \Delta Z_{(iq)} \right\}$$

$$= \max_{\substack{i \\ i \notin G}} \max \left\{ -\left\{ \bar{b}_i \right\} \min_{\substack{j \\ \bar{a}_{ij} > 0}} \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{ij}} \; ; \; -(1-\left\{ \bar{b}_i \right\}) \min_{\substack{j \\ \bar{a}_{ij} < 0}} \frac{\bar{c}_j}{-\bar{a}_{ij}} \;\middle|\; j \in NBV \right\}$$

Durch dieses Kriterium werden einerseits die Variable und andererseits gleichzeitig die Art der Verzweigung bestimmt, die die minimal mögliche Zielwertänderung verursachen.

Bei einer bereits errechneten ganzzahligen Lösung wird die Variable x_1 nach dem Kriterium

(432335)

$$\Delta Z = \min_{i} \min_{q} \left\{ \Delta Z_{(iq)} \right\}$$

$$= \min_{\substack{i \\ i \notin G}} \min \left\{ -\left\{ \bar{b}_i \right\} \max_{\substack{j \\ \bar{a}_{ij} > 0}} \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{ij}} \; ; \; -(1-\left\{ \bar{b}_i \right\}) \max_{\substack{j \\ \bar{a}_{ij} < 0}} \frac{\bar{c}_1}{-\bar{a}_{ij}} \;\middle|\; j \in NBV \right\}$$

ausgewählt, so daß in diesem Fall durch eine möglichst große Zielwertänderung die frühzeitige Verwerfung von zulässigen Knoten angestrebt wird.

Die Beachtung von derartig beschriebenen Verzweigungsregeln und Kriterien für die frühzeitige Verwerfung von Lösungen bedarf keiner zusätzlichen Iterationsschritte des Algorithmus, sondern die Entscheidung erfolgt lediglich durch die Berechnung obiger Ausdrücke.

Durch die geringere Inanspruchnahme von Speicherkapazitaten im Vergleich zum Verfahren LAND and DOIG und die Berechnungsmöglichkeit ganzzahliger Suboptima während des Lösungsvorganges gestaltet sich das DAKIN-Verfahren recht vorteilhaft.

Eine Berücksichtigung der beschriebenen Modifikationen [1] kann das Verfahren - wie das folgende Beispiel zeigt - in seinem rechnerischen Umfang weiter reduzieren und somit für die Anwendung auf ökonomische Probleme, wie z.B. die Lösung ganzzahliger simultaner Investitions- und Finanzierungsmodelle, empfehlenswert machen.
Eine generelle Vorteilhaftigkeit läßt sich jedoch nicht beweisen.

---

[1] Andere Modifikationen der Verzweigungsverfahren, die sich entweder mit strengeren Verwerfregeln oder der Organisation der Verzweigung auseinandersetzen, vgl. u.a. bei ROY, B. u.a.: From S.E.P. Procedure to the Mixed Ophelie Program, a.a.O., S. 419-436. SHARESHIAN, R.: User's Manual: Branch-and-Bound Mixed-Integer Programming. BBMIP. IBM General Program Library. Program Information Department 1967, zitiert nach: KORTE, B.: Ganzzahlige Programmierung - Ein Überblick, a.a.O., S. 87. NOLTEMEIER, H.: Auswahlprobleme. In: Operations Research Verfahren. Bd. 9, Hrsg. v. R. HENN, Meisenheim am Glan 1971, S. 73-83, hier S. 8o ff.

Beispiel zum modifizierten DAKIN Verfahren

Gegeben sei das Problem

$$
\begin{aligned}
Z = 5x_1 + 9x_2 &= \max! \\
3x_1 + 4x_2 &\leqq 24 \\
5x_1 + 12x_2 &\leqq 60 \\
4x_1 + 3x_2 &\leqq 24 \\
x_1, x_2 &\geqq 0 \wedge \in G
\end{aligned}
$$

Das gemischtzahlige Optimaltableau lautet:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}_i$
x_1	1	0	0,750	-0,250	0	3,000
x_2	0	1	-0,313	0,188	0	3,750
x_5	0	0	-2,063	0,438	1	0,750
$\bar{c}_j$	0	0	0,937	0,438	0,000	48,750

Diese Lösung bildet den Knoten K_1.

Wegen des gebrochenen Lösungswertes der ganzzahlig geforderten Variablen x_2 ist der erste Verzweigungsschritt für die nichtganzzahlige Variable x_2 nach der Formel

(432334)

$$
\Delta Z = \max_{\substack{i \\ i \notin G}} \max_{q} \left\{ \Delta Z_{(iq)} \right\}
$$

$$
= \max_{\substack{i \\ i \notin G}} \max_{q} \left\{ -\{\bar{b}_i\} \min_{\substack{j \\ \bar{a}_{ij}>0}} \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{ij}} \; ; \; -(1-\{\bar{b}_i\}) \min_{\substack{j \\ \bar{a}_{ij}<0}} \frac{\bar{c}_j}{-\bar{a}_{ij}} \;\middle|\; j \in NBV \right\}
$$

vorzunehmen.

Da in dem Tableau von den Hauptvariablen nur noch eine Variable einen nichtganzzahligen Wert aufweist, vereinfacht sich das Auswahlkriterium zu

$$\Delta Z = \max_{q}\left\{\Delta Z_{(2q)}\right\}$$

$$= \max\left\{ -\left\{\bar{b}_2\right\} \min_{\substack{j \\ \bar{a}_{2j}>0}} \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{2j}} \; ; \; -(1-\left\{\bar{b}_2\right\}) \min_{\substack{j \\ \bar{a}_{2j}<0}} \frac{\bar{c}_j}{-\bar{a}_{2j}} \;\middle|\; j \in NBV \right\}$$

Zunächst werden die Zielwertänderungen betrachtet, die durch die zusätzliche Restriktion $x_2 \leqq 3$ hervorgerufen werden:

$\underline{x_2 \leqq 3}$

$$\Delta Z_{21} = -\left\{\bar{b}_2\right\} \cdot \frac{\bar{c}_4}{\bar{a}_{24}} = -0{,}75 \cdot \frac{0{,}438}{0{,}188} = -1{,}75$$

Die Änderung des Zielwertes bei Einführung der zusätzlichen Restriktion $x_2 \leqq 3$ betrüge -1,75

Ähnlich wird für die alternativ in Betracht zu ziehende Restriktion $x_2 \geqq 4$ verfahren.

$\underline{x_2 \geqq 4}$

$$\Delta Z_{22} = -(1-\left\{\bar{b}_2\right\}) \cdot \frac{\bar{c}_3}{-\bar{a}_{23}} = -0{,}25 \cdot \frac{0{,}937}{0{,}313} = -0{,}75$$

Die minimale Zielwertänderung der Alternativen ergibt sich als

$$\Delta Z = \max\left\{ \Delta Z_{21}, \Delta Z_{22} \right\} = \left\{ -1{,}75; -0{,}75 \right\} = -0{,}75$$

Die minimale Zielwertänderung beträgt -0,75 und wird durch die Verzweigung $x_2 \geqq 4$ hervorgerufen, so daß $x_2 \geqq 4$ die erste zusätzliche Restriktion darstellt. Als neue Basisvariable ergibt sich

$$x_3 = \frac{1-\{\bar{b}_2\}}{-\bar{a}_{23}} = \frac{0{,}250}{0{,}313} = 0{,}8$$

Nach Einfügung der neuen Restriktion $x_2 \geqq 4$ in das Tableau wird eine neue Optimallösung berechnet. Die zugehörigen Lösungswerte der ganzzahlig geforderten Variablen x_1 und x_2 betragen $x_1 = 2{,}4$, $x_2 = 4{,}0$ bei einem Zielwert von $Z = 48{,}0$.
Diese Lösung stellt den Knoten K_2 dar.

Wegen der Nichtganzzahligkeit von x_1 wird die zugehörige Tableauzeile betrachtet und die Zielwertänderungen, die durch die Berücksichtigung der jeweils zusätzlichen Restriktionen $x_1 \leqq 2$ und $x_1 \geqq 3$ entstehen, berechnet.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}_i$
x_1	1	0	0	0,2	0	2,4	2,4
$\bar{c}_j$	0	0	0	1	0	3	

$x_1 \leqq 2$

1) $\Delta Z_{114} = -\{\bar{b}_1\} \cdot \frac{\bar{c}_4}{\bar{a}_{14}} = -0{,}4 \cdot \frac{1}{0{,}2} = -2$

2) $\Delta Z_{116} = -\{\bar{b}_1\} \cdot \frac{\bar{c}_6}{\bar{a}_{16}} = -0{,}4 \cdot \frac{3}{2{,}4} = -0{,}5$

Eine Verzweigung $x_1 \geqq 3$ ist nicht möglich, da $\bar{a}_{1j} > 0;\ \forall_j$

$$\Delta Z = \max\left\{\Delta Z_{114}, \Delta Z_{116}\right\} = \left\{-2, -0{,}5\right\} = -0{,}5$$

Die minimale Zielwertänderung wird durch $x_1 \leqq 2$ bei Einführung der neuen Basisvariablen

$$x_6 = \frac{\{\bar{b}_1\}}{\bar{a}_{16}} = \frac{0{,}4}{2{,}4} = 0{,}17$$

erzielt.

Mit dieser zusätzlichen Restriktion wird ein neues Optimaltableau berechnet, das zu dem Knoten K_3 führt.

Die Lösungswerte der Hauptvariablen betragen $x_1 = 2{,}0$ und $x_2 = 4{,}167$ bei einem Zielwert von $Z = 47{,}5$.

Wegen der Nichtganzzahligkeit der Variablen x_2 wird wiederum deren Tableauzeile betrachtet und es werden die Zielwertänderungen durch die angenommenen Verzweigungen wie oben berechnet:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}_i$
x_2	0	1	0	0,083	0	-0,417	0	4,167
$\bar{c}_j$	0	0	0	0,750	0	1,250	0	47,50

$x_2 \leqq 4$

$$\Delta Z_{21} = -\{\bar{b}_2\}\frac{\bar{c}_4}{\bar{a}_{24}} = -0{,}167 \cdot \frac{0{,}75}{0{,}083} = -1{,}5$$

$x_2 \geqq 5$

$$\Delta Z_{22} = -(1-\{\bar{b}_2\})\frac{\bar{c}_6}{-\bar{a}_{26}} = -0{,}833 \cdot \frac{1{,}25}{0{,}417} = -2{,}5$$

$$\Delta Z = \max\{\Delta Z_{21}, \Delta Z_{22}\} = \max\{-1{,}5, -2{,}5\} = -1{,}5$$

Die minimale Änderung des Zielfunktionswertes wird durch die Verzweigung $x_2 \leqq 4$ erzielt, bei der die Zielwertänderung -1,5 beträgt und als neue Basisvariable $x_4 = \frac{\{\bar{b}_2\}}{\bar{a}_{24}} = 2$ zu berücksichtigen ist.

Unter Hinzuziehung der zusätzlichen Restriktion $x_2 \leqq 4$ wird ein neues Optimum ermittelt, das den Knoten K_4 beschreibt.

In dieser Lösung nehmen alle Hauptvariablen ganzzahlige Lösungswerte an: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $Z = 46$.

Somit bricht der Ast hier ab und es wird jetzt die Alternativverzweigung des vorhergehenden noch freien Knotens K_3 betrachtet.

Wegen der bereits in diesem Knoten vorgenommenen Verzweigung mit $x_2 \leqq 4$ bleibt nur die zusätzliche Restriktion $x_2 \geqq 5$ als Alternative für eine weitere Verzweigung.

Gleichzeitig ändert sich durch den vorhandenen ganzzahligen Knoten K_4 das Auswahlkriterium für weitere Verzweigungen. Verzweigt wird im folgenden durch die zusätzliche Restriktion, bei der die absolut größtmögliche Zielwertänderung erfolgt.

(432335)

$$\Delta Z = \min_i \min_q \{\Delta Z_{(iq)}\}$$

$$= \min_{i \notin G} \min \left\{ -\{\bar{b}_i\} \max_{\bar{a}_{ij}>0} \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{ij}};\ -(1-\{\bar{b}_i\}) \max_{\bar{a}_{ij}<0} \frac{\bar{c}_j}{-\bar{a}_{ij}} \,\middle|\, j \in NBV \right\}$$

Die Optimierung des durch die Restriktion $x_2 \geqq 5$ erweiterten Beschränkungssystems des Knotens K_3 führt zu einem Knoten K_5 mit einer unzulässigen Lösung, so daß beim Knoten K_2 mit der noch freien Alternative $x_1 \geqq 3$ weiterverzweigt wird.

Die Optimierung liefert auch hier eine unzulässige Lösung (K_6), weshalb auf den noch verzweigungsfähigen Knoten K_1 zurückgegangen wird.

Um den Knoten K_2 zu erzeugen, wurde im Knoten K_1 bereits die zusätzliche Restriktion $x_2 \geqq 4$ verwendet; deshalb wird jetzt mit der Alternative $x_2 \leqq 3$ als künstlicher Restriktion des Knotens K_1 eine neue Optimallösung berechnet.

Als Lösungswerte erhält man $x_1 = 3{,}75$, $x_2 = 3{,}0$. Der Zielwert $Z = 45{,}75$ dieses Knotens K_7 ist kleiner als der Zielwert des ganzzahligen Bounds K_4; der betrachtete Ast endet. Somit existieren keine weiteren zulässigen Endknoten, die einen größeren Zielwert als K_4 aufweisen, so daß das Verfahren abbricht und das Problem mit der optimalen ganzzahligen Lösung $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $\hat{Z} = 46$ gelöst ist.

Der Lösungsgang läßt sich noch einmal an dem folgenden Entscheidungsbaum nachvollziehen.

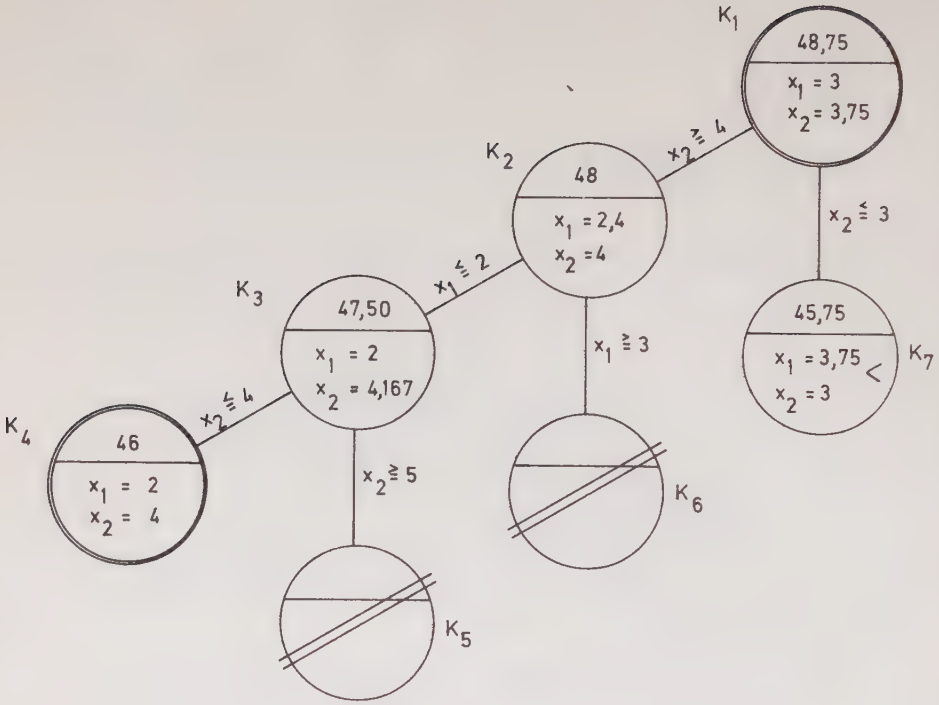


Abb.[1] 6

Löst man das Beispiel nach dem DAKIN-Verfahren mit der Auswahlregel für die Basisvariable $x_1 \notin G$; $1 = \min i, \forall x_i \notin G$ erhält man folgenden Lösungsbaum:

---

[1] Anmerkung zu den gezeichneten Knoten:

Der Lösungsvektor des Knotens ist unzulässig.

Es existiert bereits eine ganzzahlige Lösung mit einem höheren Zielfunktionswert.

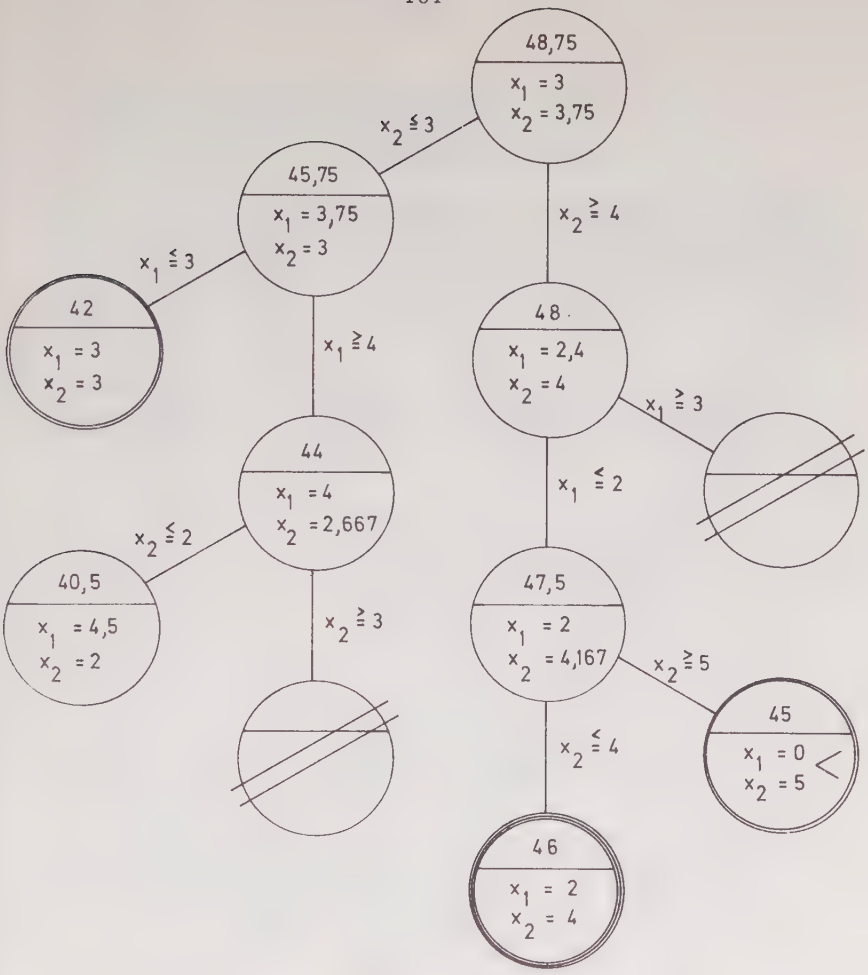


Abb. 7

Der Vergleich beider Entscheidungsbäume zeigt, daß bei Anwendung des differenzierten Auswahlkriteriums statt elf nur noch sieben Knoten zu berechnen sind.

Bei größeren Problemen kann sich dieser Vorteil ganz beträchtlich auf den Rechenaufwand auswirken.
Für das simultan zu lösende Investitions- und Finanzierungsproblem ergibt sich unter Berücksichtigung der Ganzzahligkeitsbedingung für die Investitionsvariablen folgender Lösungsbaum:

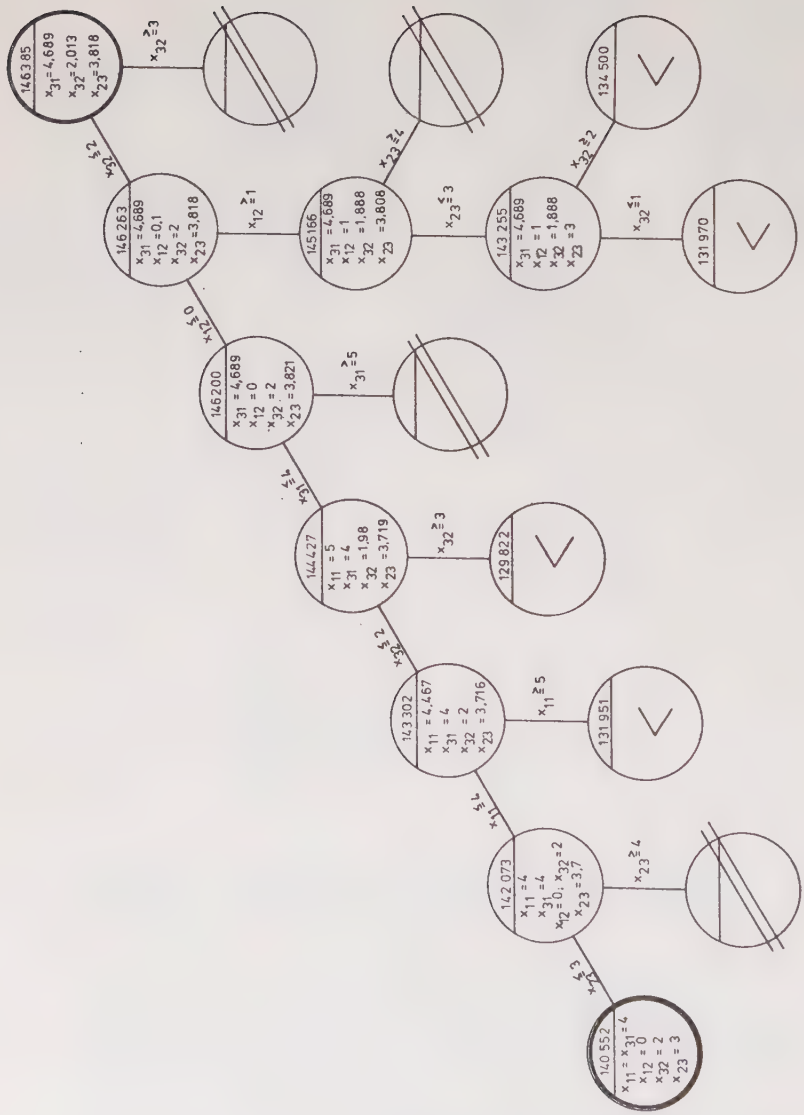

140 552
x11 = x31 = 4
x12 = 0
x32 = 2
x23 = 3
142 073
x11 = 4
x31 = 4
x12 = 0, x32 = 2
x23 = 3,7
x23 ≥ 4
143 302
x11 = 4,467
x31 = 4
x32 = 2
x23 = 3,716
x11 ≥ 5
131 951
144 427
x11 = 5
x31 = 4
x32 = 1,98
x23 = 3,719
x32 ≥ 3
129 822
146 200
x31 = 4,689
x12 = 0
x32 = 2
x23 = 3,821
x31 ≥ 5
146 263
x31 = 4,689
x12 = 0,1
x32 = 2
x23 = 3,818
x12 ≥ 1
145 166
x31 = 4,689
x12 = 1
x32 = 1,888
x23 = 3,808
x23 ≤ 3
143 255
x31 = 4,689
x12 = 1
x32 = 1,888
x23 = 3
x23 ≥ 2
134 500
131 970
x32 ≤ 1
146 385
x31 = 4,689
x32 = 2,013
x23 = 3,818
x32 ≥ 3

Abb. 8

433 Schnitthyperebenenverfahren

4331 Idee der Schnitthyperebenenverfahren

Die Schnitthyperebenenverfahren[1] - auch cutting-plane-Verfahren genannt - wurden zuerst von Gomory für die Lösung von Problemen mit ausschließlich ganzzahligen Variablen beschrieben[2].

Die Idee der Schnitthyperebenenverfahren[3] nutzt die Tatsache aus, daß die ganzzahlige optimale Lösung eines Problems auch dann optimal ist, wenn als Menge der zulässigen

---

[1] Die Menge M aller x, die die Bedingung $M=(x|\, ax=b)$ im n-dimensionalen Raum erfüllt, heißt (n-1) dimensionale Hyperebene. Vgl. Lehrbuch der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften, a.a.O., S. 202.

[2] Vgl. GOMORY, R.E.: Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs. In: Bulletin of the American Mathematical Society, 64 (1958) 5, S. 275-278.

[3] In der Literatur sind selten allgemeingültige Aussagen über Schnitthyperebenenverfahren durch Berechnungen von Beispielen zu finden, so daß die Beurteilung der Verfahren fast ausschließlich auf theoretischen Untersuchungen aufbaut.
Die Ursache liegt in der Rechenaufwendigkeit der Verfahren (vgl. auch KORTE, B.: Ganzzahlige Programmierung - Ein Überblick, a.a.O., S. 120) und deren Abhängigkeit von der speziellen Problemstruktur.

Lösungen die konvexe[1] Hülle der Menge der ganzzahligen zulässigen Lösungen betrachtet[2] wird.

Das ganzzahlige Problem wird zunächst unter Vernachlässigung der Ganzzahligkeitsbedingungen definiert und mit der Simplexmethode oder einem verwandten Verfahren optimiert, so daß in der Regel gemischtzahlige Optimalwerte erhalten werden.

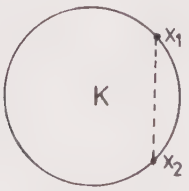
Durch die Konstruktion bestimmter zusätzlicher linearer Restriktionen wird dann die Menge der zulässigen kontinuierlichen Lösungen so lange verkleinert, bis die optimale Lösung des durch die Schnittflächen veränderten Problems die Ganzzahligkeitsbedingungen erfüllt. Die Schnittflächen werden dabei so gelegt, daß lediglich eine Lösungsmenge mit nichtganzzahligen Punkten von der konvexen Menge des ursprünglichen Problems abgeschnitten wird[3], so daß nur Teile außerhalb der konvexen Hülle der

---

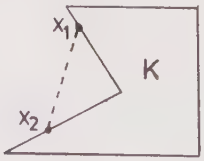
[1] Eine Teilmenge K eines Vektorraumes L heißt konvex, wenn mit beliebigen Elementen $x_1 \in K$ und $x_2 \in K$ auch jede Linearkombination von x_1 und x_2 zur Teilmenge K gehört.

Vgl. Lehrbuch der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften, a.a.O., S. 202.

KREKÓ, B.: Lehrbuch der linearen Optimierung, a.a.O., S. 142 ff.



konvexe Menge



nicht konvexe Menge

[2] Vgl. auch SUCHOWITZKI, S. I. und L. I. AWDEJEWA: Lineare und konvexe Programmierung, a.a.O., S. 126.

[3] Vgl. auch LÖDER, K.: Zur Anwendung neuerer Algorithmen der ganzzahligen linearen Programmierung. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 39 (1969), S. 407.

ganzzahligen Punkte eliminiert werden und damit alle ganzzahligen zulässigen Lösungspunkte erhalten bleiben. Die Vorgehensweise läßt sich graphisch veranschaulichen:

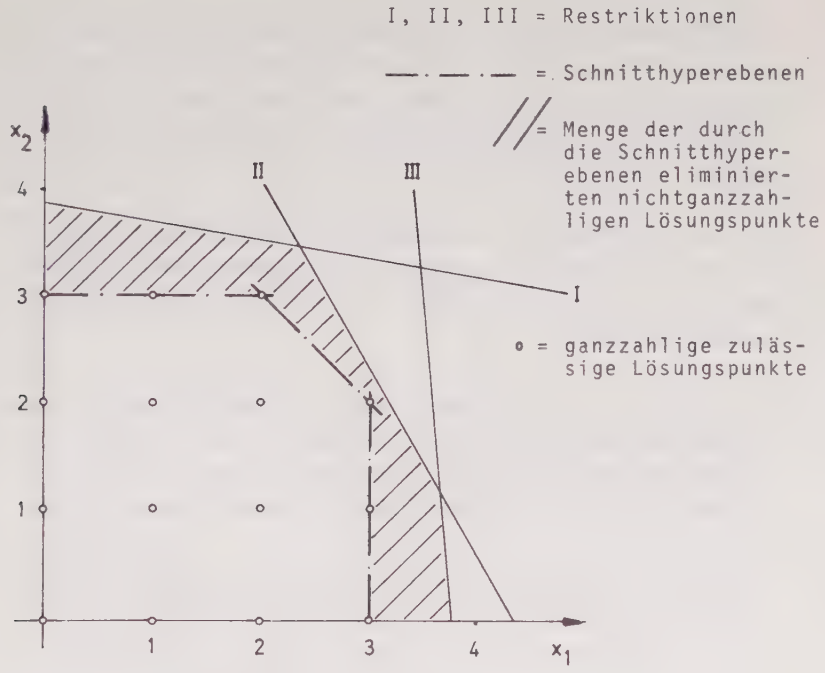


Abb. 9

Die Konstruktion von Schnitthyperebenen bedeutet eine Linearisierung der Ganzzahligkeitsbedingung[1], d. h. aus den Ungleichungen des Problems und der Ganzzahligkeitsbedingung werden neue lineare Ungleichungen gebildet[2], die als sogenannte 'Schnitte' oder 'cutting-planes' bezeichnet

[1] Vgl. FLEISCHMANN, B.: Duale und primale Schnitthyperebenenverfahren in der ganzzahligen linearen Optimierung. Diss. Hamburg 1970, S. 35.

[2] Eine Ausnahme bildet der im Kapital 4336 beschriebene Intersection-cut.

werden. Ziel der Verkleinerung des Beschränkungsbereiches durch die künstlichen Restriktionen ist die Erzeugung ganzzahliger Eckpunkte des Lösungsbereiches, da in der linearen Programmierung nur diese als Basislösung in Frage kommen[1].

Die Erkenntnis, daß der optimale ganzzahlige Lösungspunkt wiederum Eckpunkt des reduzierten Restriktionsfeldes ist, läßt die Simplexmethode bzw. verwandte Formen der Simplexmethode bei den Tableautransformationen zur Anwendung kommen[2].

Die ausgewählten, im folgenden dargestellten und verglichenen Schnitthyperebenenverfahren[3] unterscheiden sich in der Art und der Konstruktion der Schnittebenen und damit in der Schnittiefe.

Die Effektivität bzw. Tiefe der Schnitte übt dabei einen entscheidenden Einfluß auf die Konvergenz, die Konvergenzgeschwindigkeit und die Iterationshäufigkeit aus, was gerade bei der Verwendung elektronischer Rechenanlagen[4]

---

1 Vgl. LINDNER, L.: Grundlagen und Bedeutung von Algorithmen zur ganzzahligen linearen Programmierung, a.a.O., S. 32.

2 Vgl. PIEHLER, J.: Ganzzahlige lineare Optimierung. a.a.O., S. 12.

3 In der folgenden Betrachtung wird zunächst davon ausgegangen, daß ein rein ganzzahliges Problem zu lösen ist. Mixed Integer Probleme können jedoch auch durch die beschriebenen Verfahren - mit Ausnahme der Verfahren in Kapitel 4332 und 4334 - einer Lösung zugeführt werden.

4 Durch die Speicherintensität der Verfahren und die Komplexität der zu lösenden ökonomischen Probleme scheidet nicht nur eine manuelle Lösung aus, sondern die Lösung erfordert darüber hinaus eine elektronische Rechenanlage, die eine bestimmte Mindestkapazität aufweisen muß. Vgl. dazu das Beispiel in Kapitel 44.

von ausschlaggebender Bedeutung ist.

Betrachtet man ein lineares ganzzahliges Problem, in dem

$$\sum_{j=1}^{\bar{j}} c_j \cdot x_j$$

bezüglich der linearen Nebenbedingungen und zugleich der Nichtnegativitäts- und Ganzzahligkeitsbedingungen für die Variablen zu maximieren ist, so erhält man unter Verwendung der allgemein üblichen Symbolik folgendes Programm:

$$\left\{ \max \sum_{j=1}^{\bar{j}} c_j \cdot x_j \,\middle|\, \sum_{j=1}^{\bar{j}} a_{ij} \cdot x_j \leqq b_i ; i=1,..,\bar{i}; x_j \geqq 0 \wedge 6G, \forall j=1,..,\bar{j} \right\}$$

G = Menge der positiven ganzen Zahlen.

Die optimale ganzzahlige Lösung dieses Problems zeigt drei charakteristische Eigenschaften[1]:

1. Die Lösung ist optimal im Sinne der linearen Programmierung, so daß

   $$\hat{c}_j \geqq 0 \qquad \forall\ j=1, .., \bar{j}+\bar{i}$$

   gilt.[2]

2. Die Lösung muß primal zulässig sein, so daß

   $$\hat{b}_i \geqq 0 ; \qquad \forall\ i=1, .., \bar{i}$$

   erfüllt ist.

---

[1] Vgl. YOUNG, R. D.: A Simplified Primal (All-Integer) Integer Programming Algorithm. In: Operations Research, Vol. 16 (1968), S. 751.

[2] Das '^' Zeichen über den Symbolen bedeutet, daß eine optimale ganzzahlige Lösung betrachtet wird.

3. Die Lösungswerte der Problemvariablen müssen ganzzahlig sein, d.h.

$$\hat{b}_i \in G \qquad \forall\ i=1, .., \bar{i}$$

Gibt es bei einem vorliegenden Problem eine zulässige Lösung, läßt sich stets ein Tableau erstellen, bei dem zwei dieser drei Eigenschaften erfüllt sind[1].
Wird durch den Iterationsvorgang auch die dritte Eigenschaft erfüllt, ist die optimale ganzzahlige Lösung gefunden und das Verfahren beendet. Gelingt dies mit einer endlichen Anzahl von Iterationsschritten, so heißt das Verfahren konvergent[2].

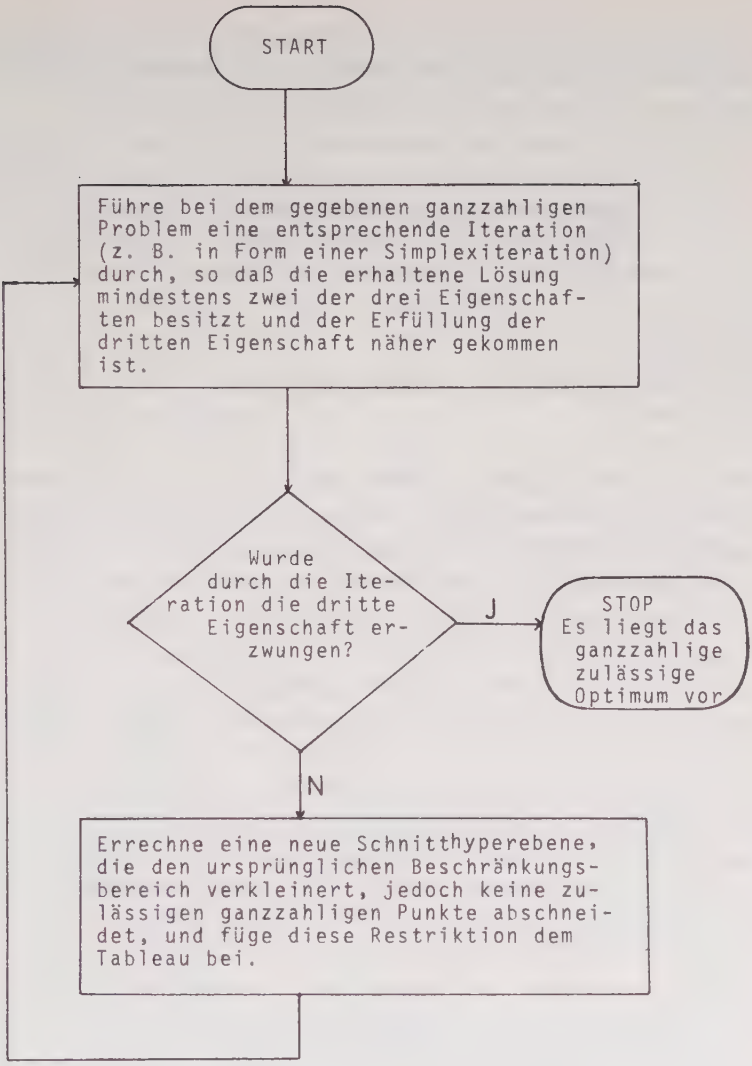
Unter Beachtung der Erfüllung der aufgezeigten Eigenschaften läßt sich für das Vorgehen der Schnittebenenverfahren ein globales Ablaufdiagramm erstellen[3]:

---

[1] Vgl. auch KREUZBERGER, H.: Verfahren zur Lösung ganzzahliger linearer Optimierungsprobleme, a.a.O., S. 26.

[2] Vgl. KORTE, B.: Ganzzahlige Programmierung - Ein Überblick, a.a.O., S. 91.

[3] Die grobe Vorgehensweise bei den Schnittebenenverfahren findet man auch in der Darstellung einer Schrittfolge: Vgl. BOWMAN, V.J.; NEMHAUSER, G.L.: Deep Cuts in Integer Programming. Core decision paper no. 6925. Center of Operations Research and Econometrics, Heverlee 1969. Zitiert bei KORTE, B.: Ganzzahlige Programmierung - Ein Überblick, a.a.O., S. 91.


START
Führe bei dem gegebenen ganzzahligen Problem eine entsprechende Iteration (z. B. in Form einer Simplexiteration) durch, so daß die erhaltene Lösung mindestens zwei der drei Eigenschaften besitzt und der Erfüllung der dritten Eigenschaft näher gekommen ist.
Wurde durch die Iteration die dritte Eigenschaft erzwungen?
J
STOP
Es liegt das ganzzahlige zulässige Optimum vor
N
Errechne eine neue Schnitthyperebene, die den ursprünglichen Beschränkungsbereich verkleinert, jedoch keine zulässigen ganzzahligen Punkte abschneidet, und füge diese Restriktion dem Tableau bei.

Prinzipiell lassen sich die Schnittebenenverfahren nach deren Lösungswegen und damit der Reihenfolge der Erfüllung der angesprochenen Eigenschaften unterscheiden[1, 2].

	Eigenschaft 1 Ganzzahligkeit der Lösungswerte	Eigenschaft 2 primale Optimalität, duale Zulässigkeit	Eigenschaft 3 primale Zulässigkeit, duale Optimalität
Verfahren A	X	X	
Verfahren B	X		X
Verfahren C		X	X

Die Verfahren A gehen von einer optimalen ganzzahligen aber unzulässigen Lösung aus, deren Werte bei Vorgabe nicht ganzzahliger Koeffizienten durch entsprechende Multiplikation ganzzahlig gemacht werden. Durch das Iterationsverfahren wird bei Aufrechterhaltung der Ganzzahligkeit und der dualen Zulässigkeit die primale Zulässigkeit schrittweise angestrebt. Liegt eine primal zulässige Lösung vor, ist gleichzeitig das ganzzahlige Optimun gefunden. Durch die Neueinführung zusätzlicher Restriktionen, die Pivotelemente vom Betrag Eins liefern, werden nur Subtraktions- und Additionsoperationen[3] durchgeführt, so daß alle ganzzahligen Koeffizienten des Ausgangstableaus auch ganzzahlig bleiben und somit die Ganzzahligkeit der Lösungswerte in jedem Tableau garantiert bleibt.

---

[1] Diese Unterscheidung gilt nur für den Lösungsweg bzw. nicht optimale Zwischenlösungen, da im ganzzahligen Optimum alle drei Eigenschaften erfüllt sein müssen.

[2] Vgl. auch KREUZBERGER, H.: Verfahren zur Lösung ganzzahliger linearer Optimierungsprobleme, a.a.O., S. 26 f.

[3] Vgl. BALINSKI, M.L.: Integer Programming: Methods, Uses, Computation, a.a.O., S. 253-313, hier S. 254.

Die beschriebene Gruppe von Lösungsmethoden werden als duale Rein-Ganzzahligkeits Algorithmen bzw.'duale All-integer-Integer Algorithmen'[1] bezeichnet.

Die Verfahren B bauen auf einer primal zulässigen ganzzahligen Lösung auf. Das Vorgehen - nämlich Einführung neuer Restriktionen - entspricht dem des Verfahrens A und garantiert daher stets ganzzahlige Werte. Das Optimum liegt dann vor, wenn eine primal optimale Lösung gefunden ist.

Diese Verfahren werden als'primale All-integer Integer Algorithmen'[2]bezeichnet.

Bei dem Verfahren C wird das optimale gemischtzahlige Lösungstableau berechnet und durch Hinzufügen von zusätzlichen Restriktionen unter Beibehaltung der Zulässigkeit und der Optimalität schrittweise die ganzzahlige Optimallösung angestrebt.

Auf diesem Verfahren beruht unter anderem der 'Fractional Integer Programming Algorithm'[3].

---

[1] Vgl. GOMORY, R.E.: An All-integer Integer Programming Algorithm. In: Industrial Scheduling. Hrsg. v. J.F. MUTH und G.L. THOMPSON. Englewood Cliffs 1963, S. 193-2o6. Diese Verfahren eignen sich nur für Probleme, die ausschließlich ganzzahlige Problemvariable erfordern. HU, T.C.: Integer Programming and Network Flows, a.a.O., S. 246 ff. YOUNG, R.D.: A Simplified Primal (All-Integer) Integer Programming Algorithm, a.a.O., S. 752.

[2] Vgl. GLOVER, F.: A New Foundation for a Simplified Primal Integer Programming Algorithm. In: Operations Research, Vol. 16 (1968), S. 727-74o, hier S. 727. HU, T.C.: Integer Programming and Network Flows, a.a.O., S. 287. YOUNG, R.D.: A Simplified Primal (All-Integer) Integer Programming Algorithm, a.a.O., S. 75o.

[3] Eine nähere Beschreibung dieses Verfahrens und die entsprechenden Literaturangaben werden in Kapitel 4332 gegeben.

Unter dem Gesichtspunkt der Erfüllung der drei angesprochenen Eigenschaften läßt sich für die zu untersuchenden Schnittebenenverfahren folgende Einteilung treffen:

	Eigenschaft 1 Ganzzahligkeit der Lösungswerte	Eigenschaft 2 primale Optimalität, duale Zulässigkeit	Eigenschaft 3 primale Zulässigkeit, duale Optimalität
Fractional Integer Programming (Gomory)		X	X
All-integer Integer Programming (Gomory)	X	X	
Verfahren Dantzig		X	X
Verfahren des Intersection-cut (Balas)		X	X
Primaler All-Integer Algorithmus (Young)	X		X

4332 Fractional Integer Programming Algorithmus (GOMORY)

43321 Beschreibung des Verfahrens[1]

Das Problem lautet:

(433211)

$$\left\{ \max \sum_{j=1}^{\bar{j}} c_j \cdot x_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\bar{j}} a_{ij} \cdot x_j \leqq b_i;\; x_j \geqq 0 \wedge \in G;\; \forall i=1,..,\bar{i} \right\}$$

---

[1] Das Verfahren wurde erstmalig von GOMORY im Jahre 1958 beschrieben.
Vgl. GOMORY, R.E.: An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs. Princeton - IBM Research, Project Technical Report 1958. Vgl. auch GOMORY, R.E.: Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs, a.a.O., S. 275 ff.
Der Endlichkeitsbeweis des Verfahrens erfolgt u.a. bei: GOMORY, R.E.: An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs. In: Recent Advances in Mathematical Programming. Hrsg. v. R.L. GRAVES u. P. WOLFE. New York, Toronto, London 1963, S. 287 ff.
Die Beschreibung dieses Verfahrens findet man außerdem u.a. bei: GOMORY, R.E.; BAUMOL, W.J.: Integer Programming and Pricing. In: Econometrica, Vol. 28 (1960), S. 521-550.
TEREBESI, M.: Bemerkungen zum Verfahren von GOMORY zur Bestimmung ganzzahliger Lösungen von linearen Programmen. In: Unternehmensforschung, Bd. 5,(1961), S. 197-215.
STUHR, R.: Anwendungen und Lösungsverfahren der ganzzahligen linearen Programmierung, a.a.O., S. 125 ff.
DANTZIG, G.B.: Lineare Programmierung und Erweiterungen, a.a.O., S. 590-598.
HU, T.C.: Ganzzahlige Programmierung und Netzwerkflüsse (deutsch übersetzt), München, Wien 1972, S. 262 ff.
PIEHLER, J.: Ganzzahlige lineare Optimierung, a.a.O., S. 12 ff.
BURKARD, R.E.: Methoden der ganzzahligen Optimierung, a.a.O., S. 131-145.

Zunächst wird das Problem unter Vernachlässigung der Ganzzahligkeitsbedingung mit der Simplexmethode oder einer verwandten Methode optimiert.

Bietet der optimale Lösungsvektor X^0 nicht ausschließlich ganzzahlige Lösungswerte, erfolgt die Konstruktion einer zusätzlichen Restriktion in Form eines cutting-plane, der in das gemischtzahlige Optimaltableau eingeführt wird[1]. (Die Konstruktion des Schnittes wird im nächsten Kapitel gezeigt.)

Der cutting-plane leitet sich von einer Zeile des zuletzt berechneten Tableaus ab. Welche Zeile zur Schnittbildung herangezogen wird, ist grundsätzlich gleichgültig, jedoch empfiehlt es sich im allgemeinen, zur Verkürzung des Iterationsverfahrens jeweils die Zeile auszuwählen, deren Lösungswert den größten echten Dezimalbruch aufweist[2].

---

[1] Die hier betrachteten Schnitte werden auch als indirekte Schnitte bezeichnet, da sie nicht direkt in das Ausgangstableau eingeführt, sondern "über den Umweg des nichtganzzahligen Optimums" erzeugt werden./MÜLLER-MERBACH, H.: Modifikationen von Cutting-Plane-Methoden der ganzzahligen Optimierung. In: Proceedings in Operations Research. Vorträge der Jahrestagung 1971 der DGU. Hrsg. v. M. HENKE u.a., Würzburg, Wien 1972, S. 747-787, hier S. 747_7.

[2] Zur Auswahl der 'Schnittzeile' sind verschiedene Auswahlkriterien aufgezeigt worden.
Vgl. u.a. GOMORY, R.E.: An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs, a.a.O., S. 23 ff.
TEREBESI, M.: Bemerkungen zum Verfahren von GOMORY zur Bestimmung ganzzahliger Lösungen von linearen Programmen, a.a.O., hier S. 206 f.
STUHR, R.: Anwendungen und Lösungsverfahren der ganzzahligen linearen Programmierung, a.a.O., S. 132 ff.
Eine allgemein gültige Auswahlregel für alle Probleme kann jedoch noch nicht vorgewiesen werden, so daß die beste Auswahlregel oft von der Struktur des Problems abhängt. Vgl. PIEHLER, J.: Ganzzahlige lineare Optimierung, a.a.O., S. 23.
Die oben beschriebene Auswahlregel führt oft zu einer schnelleren Konvergenz des Verfahrens und läßt sich darüber hinaus einfach handhaben. Vgl. STUHR, R.: Anwendungen und Lösungsverfahren der ganzzahligen linearen Programmierung, a.a.O., S. 143. HALDI, J.; ISAACSON, L.M.: A Computer Code for Solutions to Linear Programs. In: Operations Research, Vol. 13 (1965), S. 946 ff.

Die Einführung des neuen cutting-plane verkleinert den ursprünglichen Beschränkungsbereich und schließt die optimale Lösung X^o vom zulässigen Restriktionsfeld aus, wobei jedoch alle ganzzahligen zulässigen Lösungspunkte erhalten bleiben.

Durch die Optimalität der Lösung X^o ist das dazugehörige duale Problem zulässig.

Fügt man zu diesem Tableau die zusätzliche Schnittrestriktion hinzu, bleibt die duale Zulässigkeit erhalten, da das Simplexkriterium im Primal durch Änderung der Restriktionen unberührt bleibt. Mit Hilfe der dualen Simplexmethode wird nun ein neues zulässiges Optimum berechnet.

Enthält der neue zulässige Optimalvektor ausschließlich ganzzahlige Lösungswerte, liegt das ganzzahlige Optimum $\hat{X}$ vor. Ist die Lösung nichtganzzahlig, wird ein weiterer cutting-plane konstruiert und in das zuletzt berechnete Tableau eingeführt.

Die alte Schnittzeile wird gestrichen und das veränderte Tableau mit Hilfe der dualen Simplexmethode optimiert.

Dieser Ablauf wiederholt sich solange, bis alle Lösungswerte ganzzahlig, optimal und zulässig sind oder keine neue Lösung erhalten werden kann.

43322 Konstruktion der Schnitthyperebenen

Geht man von einem linearen Optimierungsproblem

$$\left\{ \max Z = \sum_{j=1}^{\bar{J}} c_j x_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\bar{J}} a_{ij}\, x_j \leq b_i ; \quad \forall i = 1,\ldots,\bar{I} \right\}$$

aus, so erhält man durch Einfügung von Schlupfvariablen ein Gleichungssystem, das als Ausgangstableau für die Simplexmethode zu verwenden ist:

$$Z - \sum_{j=1}^{\bar{J}} c_j x_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{\bar{J}+\bar{I}} a_{ij} \cdot x_j + x_{ij} = b_i \; ; \quad \forall i = 1,..\bar{I}$$

x_{ij} = Basisvariable j in der Zeile i

Werden die Basisvariablen x_{ij}, die im Ausgangstableau aus den Schlupfvariablen bestehen, durch die Nichtbasisvariablen ausgedrückt, läßt das obige Gleichungssystem durch einfache Umformung eine modifizierte Art des Ausgangstableaus entstehen:

$$Z = Z_0 + \sum_{j=1}^{\bar{J}} c_j \cdot (-x_j) \qquad Z_0 = 0 \text{ im Ausgangstableau}$$

$$x_{ij} = b_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{J}+\bar{I}} a_{ij} \cdot (-x_j) \geq 0 \; ; \; \forall\, i = 1,..,\bar{I}$$

NBV = Menge der Nichtbasisvariablen

$$x_j \geq 0 \qquad \forall\, j = 1,..,\bar{J}$$

In diesem Ausgangstableau, das nicht mehr die Einheitsmatrix der Basisvariablen enthält, stellen die x_{ij} $(j=1,\ldots,\bar{J})$ die Basisvariablenund b_i $(i=1,..,\bar{I})$ den Lösungswert der Basis-

variablen dar, während

$$\sum_{\substack{j=\bar{1} \\ j \in \text{NBV}}}^{\bar{j}+\bar{1}} a_{ij} \cdot (-x_j) = 0 \ ,$$

da die Nichtbasisvariablen den Wert Null annehmen.

Wird die obige Tableauschreibweise unterstellt und betrachtet man eine Schnittzeile h des optimalen gemischtzahligen Tableaus[1],

(433221)

$$x_{hj} = \bar{b}_h + \sum_{\substack{j=\bar{1} \\ j \in \text{NBV}}}^{\bar{j}+\bar{1}} \bar{a}_{hj} \cdot (-x_j)$$

x_{hj} = Basisvariable j in der Zeile h

$\bar{b}_h \notin G$

so können die gemischtzahligen Koeffizienten $\bar{a}_{hj}$ und der Lösungswert $\bar{b}_h$ in einen ganzzahligen Wert und den verbleibenden Restbruch aufgespalten werden.

$$\bar{a}_{hj} = \left[\bar{a}_{hj} \right] + \left\{ \bar{a}_{hj} \right\}$$

$\left[\bar{a}_{hj} \right]$ = nächstkleinerer ganzzahliger Wert von $\bar{a}_{hj}$

$\left\{ \bar{a}_{hj} \right\}$ = gebrochener Teil von $\bar{a}_{hj}$ (Restbruch)

---

[1] Da in der Folge durch die Einführung der zusätzlichen Restriktionen stets neue 'gemischtzahlige Optimaltableaus' berechnet werden, wird zur Kennzeichnung der Tableauelemente dieser Tableaus ein Querstrich über den Tableauelementen verwendet.

$$\bar{b}_h = [\bar{b}_h] + \{\bar{b}_h\}$$

$[\bar{b}_h]$ = nächstkleinerer ganzzahliger Wert von $\bar{b}_h$

wobei

$$1 > \{\bar{a}_{hj}\} = \bar{a}_{hj} - [\bar{a}_{hj}] > 0$$

$$1 > \{\bar{b}_h\} = \bar{b}_h - [\bar{b}_h] > 0$$

$\{\bar{b}_h\}$ = gebrochener Teil von $\bar{b}_h$ (Restbruch)

Werden die Koeffizienten und der Lösungswert der Schnittzeile h (433221) in ganzzahlige Teile und Restbrüche aufgespalten, gelangt man zu

(433221a)

$$x_{hj} = [\bar{b}_h] + \{\bar{b}_h\} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} [a_{hj}](-x_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} \{\bar{a}_{hj}\}(-x_j) \geqq 0$$

Diese Gleichung wird so umgeformt, daß bei Unterstellung ganzzahliger Variablen auf der linken Seite alle ganzzahligen Ausdrücke stehen, während die rechte Seite alle nichtganzzahligen Ausdrücke aufnimmt.

(433221b)

$$[\bar{b}_h] - x_{hj} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} [\bar{a}_{hj}] \cdot x_j = -\{\bar{b}_h\} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} \{a_{hj}\} \cdot (x_j)$$

Da die linke Seite ganzzahlig und nichtnegativ ist und außerdem $0 < \{\bar{b}_h\} < 1$, $0 < \{\bar{a}_{hj}\} < 1$ sowie alle Variablen ganzzahlig, kann der Ausdruck auf der rechten Seite ebenfalls nur größer oder gleich Null sein.

Also gilt die Ungleichung:

(433222)

$$-\{\bar{b}_h\} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} \{\bar{a}_{hj}\} \cdot x_j \geqq 0$$

oder

$$-\sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} \{\bar{a}_{hj}\} \cdot x_j \leqq -\{\bar{b}_h\}$$

Bei Einführung einer nicht negativen Schlupfvariablen[1] s_h erhält man den indirekten GOMORY-Schnitt

(433222a)

$$-\sum_{\substack{j=1\\ j \in NBV}}^{\bar{J}+\bar{I}} \left\{ \bar{a}_{hj} \right\} \cdot x_j + s_h = -\left\{ \bar{b}_h \right\}$$

oder

$$-\left\{ \bar{b}_h \right\} - \sum_{\substack{j=1\\ j \in NBV}}^{\bar{J}+\bar{I}} \left\{ a_{hj} \right\} \cdot (-x_j) = s_h$$

Durch die Einführung des GOMORY-Schnitts in das letzte Optimaltableau vergrößert sich das Tableau um eine Zeile und eine Spalte.

Außerdem wird das gemischtzahlige Optimum abgeschnitten und damit die berechnete Lösung für das erweiterte Problem unzulässig[2], was im folgenden kurz zu zeigen ist:

Im gemischtzahligen Optimum nehmen alle Nichtbasisvariablen x_j den Wert Null an.

Dann gilt $$\sum_{\substack{j=1\\ j \in NBV}}^{\bar{J}+\bar{I}} \left\{ \bar{a}_{hj} \right\} \cdot x_j = 0$$

Diese Bedingung widerspricht der Gleichung (433222a), da eine Nichtbasisvariable zur Basisvariablen wird und somit einen Wert größer als Null erhält[3]; das bedeutet, daß das

---

[1] Im ganzzahligen Optimaltableau muß der Wert der neuen Basisvariablen s_h auch automatisch ganzzahlig werden, so daß eine gesonderte Ganzzahligkeitsforderung entfallen kann.

[2] Die Unzulässigkeit ergibt sich auch schon direkt aus dem GOMORY-Schnitt (433222a), bei dem $s_h = -\left\{ \bar{b}_h \right\} < 0$.

[3] Vom Degenerationsfall soll hier abgesehen werden.

alte Optimum nicht mehr zum Lösungsbereich der ganzzahligen Lösungsmenge zählt.[1]

Andererseits bleiben aber alle ganzzahligen Punkte des ursprünglichen Beschränkungsfeldes auch durch die zusätzliche Restriktion zulässig, da alle ganzzahligen Punkte die künstliche Restriktion (433222a) erfüllen. Betrachtet man nämlich irgend eine ganzzahlige Basislösung mit $s_h \geqq 0$, gilt wegen $\{\overline{b}_h\} = 0$ und $x_j = 0 \quad \forall\, j \in NBV$ auch $s_h = 0$, so daß alle ganzzahligen zulässigen Lösungspunkte toleriert werden[2].

Die Anzahl der zu konstruierenden Schnitte, die den Umfang des Rechenaufwandes in großem Maße beeinflußt, kann von vornherein nicht angegeben werden; jedoch wird bei Existenz einer ganzzahligen Lösung die Obergrenze von $(\overline{i}-\overline{j}+1)$ künstlicher Zusatzrestriktionen in einem Tableau nicht überschritten[3], da bei Einführung restriktiverer Bedingungen die sogenannte Schnittzeile gestrichen werden kann.

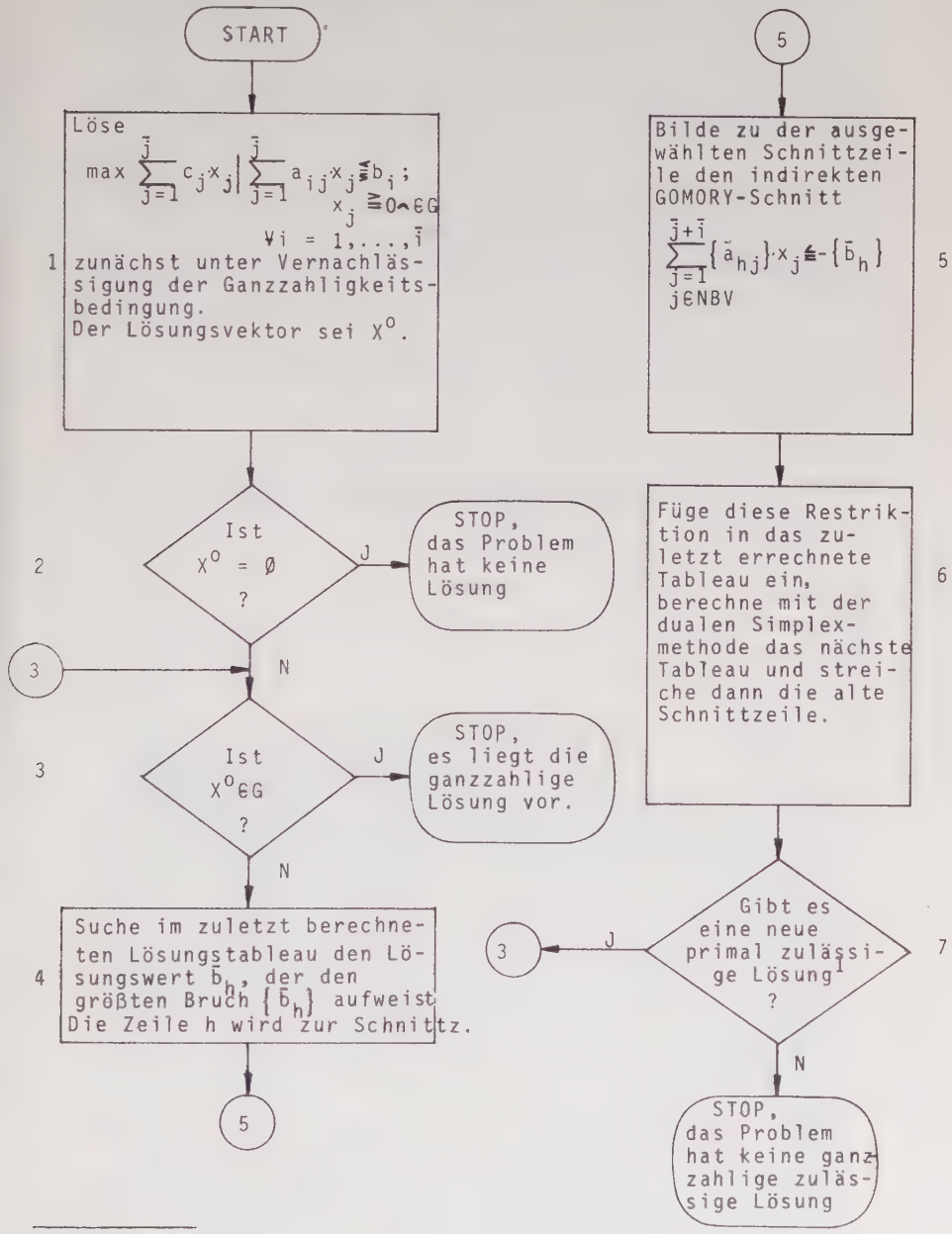
---

[1] Vgl. auch TEREBESI, M.: Bemerkungen zum Verfahren von GOMORY zur Bestimmung ganzzahliger Lösungen von linearen Programmen, a.a.O., S. 2o2.

[2] Vgl. auch GOMORY, R.E.; BAUMOL, W.J.: Integer Programming and Pricing, a.a.O., S. 526.
PIEHLER, J.: Ganzzahlige lineare Optimierung, a.a.O., S. 13.

[3] Vgl. auch PIEHLER, J.: Ganzzahlige lineare Optimierung, a.a.O., S. 14.
Zum Endlichkeitsbeweis des beschriebenen Verfahrens vgl. zusätzlich zu der in Fußnote 1 auf S. 194 angegebenen Literatur auch HADLEY, G.: Nichtlineare und dynamische Programmierung, a.a.O., S. 335-341.

Flußdiagramm zum Ablauf des Fractional Integer Programming Algorithmus (GOMORY)



[1] Sind in der neuen Restriktion alle Koeffizienten von x_j gleich Null, gibt es keine neue Lösung und das Problem hat keine ganzzahlige Lösung.

Zahlenbeispiele zum Verfahren des indirekten GOMORY-Schnitts sind in der Literatur in großer Fülle berechnet worden[1].

Selbst bei einer sehr beschränkten Zahl von Variablen und Restriktionen kann sich der Lösungsweg ausgesprochen langwierig gestalten.

Für die Anwendung des Verfahrens zur Optimierung des Investitions- und Finanzierungsprogramms muß beachtet werden, daß beispielsweise bei einer - auch relativ einfachen - Vier-Perioden-Planung schon mehr als 18 Variable und mindestens eine gleiche Anzahl von Restriktionen anfallen kann, wodurch eine Verwendung des Verfahrens für derartige Probleme unzweckmäßig wird.

4333 Dualer All-integer Integer Algorithmus (GOMORY)

43331 Beschreibung des Verfahrens

Der zweite Algorithmus von GOMORY, der sich nur für rein ganzzahlige Probleme eignet, wird als 'All Integer Algorithm' bzw. 'All-integer Integer Algorithm'[2] bezeichnet, da außer

---

[1] Vgl. dazu u.a. die Literatur von Fußnote 1 auf S. 194.

[2] Vgl. GOMORY, R.E.: An All-integer Integer Programming Algorithm. In: Industrial Scheduling. Hrsg.v. J.F. MUTH und G.L. THOMPSON. Englewood Cliffs 1963, S. 193-206.
Eine Beschreibung des Verfahrens findet man u.a. auch bei TRAUTH, J.R., WOOLSEY, R.E.: Practical Aspects of Integer Linear Programming. 30. ORSA-Tagung, Durham.(N.C), October 1966, S. 10-14.
HU, T.C.: Integer Programming and Network Flows, a.a.O., S. 246-254.
GASS, S.I.: Linear Programming. Methods and Applications. a.a.O., S. 173 ff.
SAATY, T.L.: Optimization in Integers and Related Extremal Problems. New York 1970, S. 234-242.
OUYAHIA, M.A.: Programmes Lineaires A Variables Discretes. In: Revue Francaise de Recherche Operationelle, Jg. 6 (1961), S. 55-75.
LÖDER, K.: Zur Anwendung neuerer Algorithmen der ganzzahligen Programmierung, a.a.O., S. 408 ff.
Die Anwendung des Algorithmus auf Netzpläne vgl. bei BAUGH, C.R. u.a.: Results in Using GOMORY's All-integer Integer Algorithm to Design Optimum Logic Networks. In: Operations Research, Vol. 19 (1971), S. 1090-1096.

den Lösungswerten auch alle weiteren Tableauelemente während des Iterationsvorgangs stets ganzzahlig bleiben.

Dieser duale Algorithmus geht von einem ganzzahligen Ausgangstableau aus[1] und behält während des Iterationsablaufs sowohl die duale Zulässigkeit als auch - wie erwähnt - die Ganzzahligkeit der Koeffizienten und Lösungswerte bei.

Das ganzzahlige Optimum liegt dann vor, wenn die Lösung primal zulässig ist.

Durch die Aufrechterhaltung der Ganzzahligkeit aller Elemente, die durch die besondere Auswahl des Pivotelements erzielt wird, läßt sich der Einfluß von Rundungsfehlern, der sich bei der Lösung ganzzahliger Optimierungsprobleme mit anderen Verfahren auf das Ergebnis auswirken kann, ausschalten[2].

---

[1] Die Ganzahligkeit der Tableauelemente im Ausgangstableau kann durch geeignete Multiplikation der betrachteten Matrixzeile erzielt werden.

[2] Die Vermeidung von Rundungsfehlern bei der Lösung von Ganzzahligkeitsproblemen auf EDV-Anlagen kann von großer Bedeutung für die Richtigkeit der Ergebnisse sein. Bei Verfahren, die mit gebrochenen Werten arbeiten, müssen Toleranzgrenzen angegeben werden, in denen eine Zahl als ganzzahlig gelten soll; z.B. 1,9999 = 2. Durch diese Ungenauigkeit können sich jedoch irreguläre Lösungen ergeben, indem durch Rundung ganzzahlige Lösungen ausgewiesen werden, die gar nicht ganzzahlig sind.

Es sei wieder folgendes Problem zu lösen:
(433211)

$$\left\{ \max \sum_{j=1}^{\bar{J}} c_j \cdot x_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\bar{J}} a_{ij} \cdot x_j \lesseqgtr b_i;\; x_j \geqq 0 \wedge x_j \in G \right\}$$

$$\forall\, j = 1,\ldots,\bar{J}$$
$$i = 1,\ldots,\bar{I}$$

Das diesem Problem entsprechende Ausgangstableau wird in ein dual zulässiges, jedoch primal unzulässiges Tableau transformiert, das nur ganzzahlige Tableauelemente aufweist.

Zur Konstruktion der ersten Schnittebene[1], die direkt in das obige Tableau eingeführt wird[2], ist eine Zeile h auszuwählen, für die $b_h < 0$ gilt. Gibt es keine Zeile h mit mindestens einem $a_{hj} < 0$, ist das ganzzahlige Problem unlösbar.

Liegt in der Zeile h mindestens ein $a_{hj} < 0$ vor, wird aus dieser h-ten Zeile ein cutting-plane gebildet und dem Tableau hinzugefügt.

Durch die primale Unzulässigkeit des Problems wird mit Hilfe der dualen Simplexmethode ein Iterationsvorgang eingeleitet, der zu einer neuen Lösung führt. Zu beachten ist dabei, daß das Pivotelement stets den Wert (-1) erhält, so daß bei den Tableautransformationen lediglich Additions-

---

[1] Die Herleitung der Schnittebene siehe Kapitel 43332.

[2] Da die cutting-planes aus dem Ausgangs- bzw. transformierten Ausgangstableau gewonnen werden, spricht man auch von direkten Schnitten. Vgl. MÖLLER-MERBACH, H.: Modifikationen von Cutting-Plane-Methoden der ganzzahligem Optimierung, a.a.O., S. 747.

und Subtraktionsoperationen durchgeführt werden, wodurch die Ganzzahligkeit der Tableauelemente gewahrt wird.

Der beschriebene Ablauf wiederholt sich solange, bis eine primal zulässige und damit optimale ganzzahlige Lösung vorliegt bzw. keine neue Lösung auf Grund widersprüchlich formulierter Restriktionen[1] erhalten werden kann[2].

Da in der Literatur die Konstruktion der Schnittebenen meist recht knapp dargestellt wird, soll hier auf die Herleitung der künstlichen Restriktionen so ausführlich wie notwendig eingegangen werden.

43332 Konstruktion der Schnitthyperebenen

Bei der Konstruktion des direkten GOMORY-Schnitts wird die ausgewählte Restriktion h des Ausgangstableaus betrachtet. (433321)

$$x_{hj} = b_h + \sum_{\substack{j=\overline{1} \\ j \in NBV}}^{\overline{j+i}} a_{hj}(-x_j); \qquad \begin{matrix} a_{hj} \notin G \\ b_h < 0 \wedge \in G \end{matrix}$$

Die Koeffizienten dieser Restriktion werden durch eine später noch näher zu bestimmende reelle positive Zahl λ dividiert, wobei angenommen wird, daß $\lambda \geqq 1$ (433322)

$$\frac{1}{\lambda} x_{hj} = \frac{b_h}{\lambda} + \sum_{\substack{j=\overline{1} \\ j \in NBV}}^{\overline{j+i}} \frac{a_{hj}}{\lambda} (-x_j)$$

---

[1] Unter widersprüchlichen Restriktionen soll hier auch der Tatbestand verstanden werden, bei dem die Restriktionen so gestaltet sind, daß kein ganzzahliger Lösungspunkt im Beschränkungsfeld liegt.

[2] Den Endlichkeitsbeweis für das Verfahren siehe u. a. bei KORBUT, A. A., FINKELSTEIN, J. J.: Diskrete Optimierung, a.a.O., S. 134 f.

Die so erhaltenen veränderten Koeffizienten der Variablen lassen sich in einen ganzzahligen Teil und einen Restbruch ausspalten:

$$\frac{a_{hj}}{\lambda} = \left[\frac{a_{hj}}{\lambda}\right] + \alpha_{hj}$$

$$0 \leq \alpha_{hj} < 1$$

$\frac{a_{hj}}{\lambda}$ = Bruch aus der Division des ganzzahligen Koeffizienten a_{hj} durch die ganze Zahl λ

$\left[\frac{a_{hj}}{\lambda}\right]$ = der auf die nächstkleinere ganze Zahl abgerundete Bruch $\frac{a_{hj}}{\lambda}$

Ebenso:

α_{hj} = Restbruch, bzw. nicht ganzzahliger Teil aus der Division $\frac{a_{hj}}{\lambda}$

$$\frac{b_h}{\lambda} = \left[\frac{b_h}{\lambda}\right] + \beta_h$$

$$0 \leq \beta_h < 1$$

$\left[\frac{b_h}{\lambda}\right]$ = auf die nächstkleinere ganze Zahl abgerundeter Quotient $\frac{b_h}{\lambda}$

β_h = Restbruch bzw. nicht ganzzahliger Teil aus der Division $\frac{b_h}{\lambda}$

Unter Ausnutzung dieser Schreibweise erhält man aus der Gleichung (433321) den Ausdruck:

(433321a)

$$\frac{1}{\lambda} \cdot x_{hj} = \left[\frac{b_h}{\lambda}\right] + \beta_h + \sum_{\substack{j=\underline{j} \\ j \in NBV}}^{\overline{j}+\overline{i}} \left[\frac{a_{hj}}{\lambda}\right] \cdot (-x_j) + \sum_{\substack{j=\underline{j} \\ j \in NBV}}^{\overline{j}+\overline{i}} \alpha_{hj} \cdot (-x_j)$$

Durch gezielte Umsortierung ergibt sich:
(433321b)

$$\frac{1}{\lambda}\cdot x_{hj} + \sum_{\substack{j=1\\ j\in NBV}}^{\overline{j+i}} \alpha_{hj}\cdot x_j = \left\{\left[\frac{b_h}{\lambda}\right] + \sum_{\substack{j=1\\ j\in NBV}}^{\overline{j+i}} \left[\frac{a_{hj}}{\lambda}\right](-x_j)\right\} + \beta_h$$

Für jede nichtnegative ganzzahlige Lösung, die auch die Restriktion (433321) erfüllt, nimmt die linke Seite von (433321b) einen Wert $\geqq 0$ an und der Wert in der geschweiften Klammer wird ganzzahlig.

Dementsprechend muß auch der Ausdruck auf der rechten Seite nichtnegativ sein.
(433321b)

$$\underbrace{\frac{1}{\lambda}\cdot x_{hj} + \sum_{\substack{j=1\\ j\in NBV}}^{\overline{j+i}} \alpha_{hj}\cdot x_j}_{\geqq 0} = \underbrace{\underbrace{\left\{\left[\frac{b_h}{\lambda}\right] + \sum_{\substack{j=1\\ j\in NBV}}^{\overline{j+i}} \left[\frac{a_{hj}}{\lambda}\right](-x_j)\right\}}_{\text{ganzzahlig}} + \beta_h}_{\geqq 0}$$

Durch die Ganzzahligkeit des Ausdrucks in den geschweiften Klammern und $0 \leq \beta_h < 1$ ist der ganzzahlige Teil der rechten Seite der Gleichung größer oder gleich Null.

Damit erhält man als neue zusätzliche Restriktion, die den zulässigen Lösungsbereich verkleinert:
(433322)

$$\left[\frac{b_h}{\lambda}\right] + \sum_{\substack{j=1\\ j\in NBV}}^{\overline{j+i}} \left[\frac{a_{hj}}{\lambda}\right]\cdot(-x_j) \geqq 0$$

oder

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\in NBV}}^{\overline{j+i}} \left[\frac{a_{hj}}{\lambda}\right]\cdot x_j \leqq \left[\frac{b_h}{\lambda}\right]$$

Bei Einführung einer nichtnegativen Schlupfvariablen s_h ergibt sich die Form des direkten GOMORY-Schnittes in Gleichungsform
(433322a)

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} \left[\frac{a_{hj}}{\lambda}\right] \cdot x_j + s_h = \left[\frac{b_h}{\lambda}\right]; \quad \begin{matrix} s_h > 0 \wedge \in G \\ b_h < 0 \wedge \in G \end{matrix}$$

$$\text{bzw.} \left[\frac{b_h}{\lambda}\right] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} \left[\frac{a_{hj}}{\lambda}\right] \cdot (-x_j) = s_h$$

Berücksichtigt man die Ganzzahligkeitsforderung für die Variablen x_j $(j = 1,\ldots,\bar{j})$ und die Ganzzahligkeit der Schlupfvariablen s_h, so erfüllen alle ganzzahligen Lösungspunkte, die der Gleichung (433321) gehorchen, auch gleichzeitig die neue künstliche Restriktion (433322), wodurch gezeigt wird, daß der direkte GOMORY-Schnitt keine zulässigen ganzzahligen Lösungspunkte eliminiert[1].

Die Form der Schnittebene wird durch die Wahl von λ mitbestimmt.

Für $\lambda = 1$ geht der direkte GOMORY Schnitt (433322a) in (433323)

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} [a_{hj}] \cdot x_j + s_h = [b_h]$$

[1] Einen anderen Beweisgang findet man bei MÖLLER-MERBACH, H.: Modifikationen von Cutting-Plane-Methoden der ganzzahligen Optimierung, a.a.O., S. 755 f.

über. Betrachtet man (433321b) und stellen die Elemente a_{hj} und b_h sowie $\bar{a}_{hj}$ und $\bar{b}_h$ Elemente eines gleichen Tableaus dar, entspricht die Restriktion (433323) der Schnittebene (433222a) des Fractional Integer Programming Algorithm, so daß der Fractional Integer Programming Algorithm als Sonderfall des All-integer Integer Algorithm angesehen werden kann[1].

Für $\lambda > 1$
gibt der cutting-plane (433322a)

$$\sum_{\substack{j=\bar{I} \\ j \in NBV}}^{\bar{J}+\bar{I}} \left[\frac{a_{hj}}{\lambda}\right] \cdot x_j + s_h = \left[\frac{b_h}{\lambda}\right]$$

eine zusätzliche künstliche Restriktion an, die dem Tableau hinzugefügt und auch von allen ganzzahligen Lösungspunkten erfüllt wird.

43333 Auswahl von λ

Durch den negativen Lösungswert b_h und die Anwendung der dualen Simplexmethode zur Tableautransformation wird die künstliche Restriktion zur Pivotzeile l .

Um das Pivotelement zu ermitteln, wird die Austauschspalte nach dem Auswahlkriterium der dualen Simplexmethode bestimmt[2].

---

[1] Vgl. auch KREUZBERGER, H.: Verfahren zur Lösung ganzzahliger Optimierungsprobleme, a.a.O., S. 38.
GASS, S. I.: Linear Programming, Methods and Applications, a.a.O., S. 174.

[2] Vgl. auf S. 137 die Ableitung der Kriterien für die Auswahl des Pivotelementes bei der Verwendung der dualen Simplexmethode.

$$\frac{c_r}{-a_{lr}} = \min_j \left\{ \frac{c_j}{-a_{lj}} \;\middle|\; \forall\, a_{lj} < 0; \quad c_j > 0,\ j \in NBV \right\}$$

Auf die Zeile des konstruierten cutting-plane übertragen, stellt sich das Auswahlkriterium in folgender Form dar[1]
(433331)

$$\frac{c_r}{-\left[\frac{a_{lr}}{\lambda}\right]} = \min_j \left\{ \frac{c_j}{-\left[\frac{a_{lj}}{\lambda}\right]} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\, a_{lj} < 0 \\ \forall\, j = 1,\ldots,\overline{j} \\ j \in NBV \end{array} \right\}$$

λ ist jetzt so zu wählen, daß einerseits das Pivotelement $\left[\frac{a_{lr}}{\lambda}\right] = -1$ - so daß die Tableauelemente weiterhin ganzzahlig bleiben - und gleichzeitig der Wert der Zielfunktion stark verringert wird, so daß der betrachtete cutting-plane einen möglichst tiefen Schnitt verursacht.
Um die erste Forderung zu erfüllen, geht die Gleichung (433331) über in die Form:
(433332)

$$c_r = \min_j \left\{ \frac{c_j}{-\left[\frac{a_{lj}}{\lambda}\right]} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\, a_{lj} < 0 \\ \forall\, j = 1,\ldots,\overline{j} \\ j \in NBV \end{array} \right\}$$

Da $\left[\frac{a_{lj}}{\lambda}\right]$ eine negative Zahl mit einem Absolutbetrag von ≥ 1 ist, folgt aus der Gleichung (433332):
(433332a)

$$c_r \leqq \frac{c_j}{-\left[\frac{a_{lj}}{\lambda}\right]} \leqq c_j$$

---

[1] Vgl. auch KREUZBERGER, H.: Verfahren zur Lösung ganzzahliger linearer Optimierungsprobleme, a.a.O., S. 39 ff.

Die Auswahl der Pivotspalte hängt somit nicht vom Absolutbetrag der Koeffizienten der Pivotzeile ab[1], sondern orientiert sich an den Elementen der letzten Zeile des Simplextableaus.

Kann die Pivotspalte durch (433332) nicht eindeutig bestimmt werden, werden die anderen Zeilen des Tableaus mit herangezogen[2] und die Festlegung der Pivotspalte nach der lexikographischen Auswahlregel[3] unter Berücksichtigung negativer a_{1j}-Werte getroffen.

Die erste Forderung $\left\{\left[\frac{a_{1r}}{\lambda}\right] = -1 \;\middle|\; \lambda > 0\right\}$ wird von allen Koeffizienten $a_{1j} < 0$ und $(-a_{1j}) \leqq \lambda < \infty$ erfüllt.

Zur Erfüllung der zweiten Forderung, eine möglichst starke Zielwertveränderung zu erzwingen, werden die Auswirkungen der Pivotoperation auf die Veränderung des Zielwertes untersucht.

Der neue Zielwert $\bar{Z}$ des Tableaus (T+1) ergibt sich durch eine Tableautransformation[4] des Tableaus T mit dem Zielwert Z_o.

---

[1] Vgl. KREUZBERGER, H.: Verfahren zur Lösung ganzzahliger linearer Optimierungsprobleme, a.a.O., S. 40.

[2] Vgl. BURKARD, R. E.: Methoden der ganzzahligen Optimierung, a.a.O., S. 148.

[3] Vgl. DANTZIG, G. B.: Lineare Programmierung und Erweiterungen, a.a.O., S. 269.

[4] Bei der Anwendung der dualen Simplexmethode wird unter einer Tableautransformation die Umwandlung einer nicht zulässigen optimalen Lösung in eine zulässige optimale Lösung verstanden. Die Zielwertänderung ist dementsprechend negativ, d. h. der Zielwert Z_o wird bei Maximierungsproblemen durch die Pivotoperation kleiner.

$$\bar{Z} = Z_o - \frac{\left[\frac{b_1}{\lambda}\right]}{\left[\frac{a_{1r}}{\lambda}\right]} \cdot c_r$$

Wegen $\left[\frac{a_{1r}}{\lambda}\right] = -1$, wird

$$\bar{Z} = Z_o + \left[\frac{b_1}{\lambda}\right] \cdot c_r$$

Die absolute Änderung des Zielwertes $\left|\bar{Z}-Z_o\right| = \left|\left[\frac{b_1}{\lambda}\right] \cdot c_r\right|$ wird um so größer sein, je kleiner der Wert für λ gewählt wird. Dieser Wert kann jedoch nicht einen beliebig kleinen Betrag annehmen, sondern seine Untergrenze orientiert sich an der Aufrechterhaltung der dualen Zulässigkeit des Lösungstableaus, die sich in (433332a)

$$c_r \leqq \frac{c_j}{-\left[\frac{a_{1j}}{\lambda}\right]}; \qquad \begin{array}{l} j \in NBV \\ a_{1j} < 0 \wedge \in G \end{array}$$

ausdrückt.

Um eine Grenze für λ festzulegen, wird eine größte ganzzahlige positive Zahl μ_j definiert, die der Beziehung

$$c_r \leqq \frac{c_j}{\mu_j}; \quad j \in NBV$$

gehorcht.

Für das größte ganzzahlige μ_j, das obiger Bedingung unterliegt, folgt

$$\mu_j = \left[\frac{c_j}{c_r}\right]; \quad j \in NBV$$

Unter Hinzuziehung von (432332a) erhält man eine Grenze für die Koeffizienten $\left[\frac{a_{1j}}{\lambda}\right]$ der Pivotzeile durch

(433333) $$-\left[\frac{a_{1j}}{\lambda}\right] \leq \mu_j$$

Die Beachtung dieser Restriktion führt zu einem kleinsten Wert von λ_j in der Form

$$\lambda_j = \frac{-a_{1j}}{\mu_j} \quad ; \quad j \in NBV$$

Damit ergibt sich unter Berücksichtigung der Bedingung (433333) und $a_{1j} < 0$ ($j \in NBV$) als Untergrenze für λ

$$\lambda_{min} = \max_{j \in NBV} \lambda_j = \max_{j \in NBV} \left\{ \frac{-a_{1j}}{\mu_j} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_{1j} < 0 \\ \mu_j > 0 \wedge \in G \end{array} \right\}$$

Somit ist die Untergrenze[1] für λ bestimmt.

Die Obergrenze ergibt sich aus der ersten Forderung, daß $\left[\frac{a_{1r}}{\lambda}\right] = -1$, so daß

$$\lambda_{max} = -a_{1r}$$

---

[1] GOMORY beschreibt das Auffinden des minimalen Wertes von λ in vier Schritten, die in groben Zügen dem oben beschriebenen Ablauf entsprechen. Vgl. GOMORY, R. E.: An All-integer Integer Programming Algorithm, a.a.O., S. 198 f. Zur Ermittlung eines λ-Wertes vgl. auch WILSON, R. B.: Stronger Cuts in GOMORY's All-integer Integer Programming Algorithm. In: Operations Research, Vol. 15 (1967), S. 155-157. MÖLLER-MERBACH versucht, den günstigsten λ-Wert durch schrittweise Verkleinerung eines zunächst festgesetzten Wertes ($\lambda = \max a_{1j}$) zu ermitteln. Vgl. MÖLLER-MERBACH, H.: Modifikationen von Cutting-Plane-Methoden der ganzzahligen Optimierung, a.a.O., S. 759 f.

Zur Veranschaulichung der Berechnung von λ min sei folgendes Beispiel angeführt.

Gegeben ist ein dual zulässiges ganzzahliges Tableau, das die Nichtbasisvariablen x_1, x_2 und x_3 enthält

	x_1	x_2	x_3	b_i	
	-2	-2	-8	-15	Zeile 1
c_j	↑10	15	24		
	Spalte r				

Zu berechnen ist

$$\lambda_{min} = \max_{j \in NBV} \lambda_j = \max \left\{ \frac{-a_{1j}}{\mu_j} \;\middle|\; \begin{matrix} a_{1j} < 0 \\ \mu_j > 0 \end{matrix} \right\}$$

Zunächst werden die Werte für μ_j (j = 1, 2, 3) ermittelt:

$$\mu_j = \left[\frac{c_j}{c_r} \right]$$

$$\mu_1 = 1$$

$$\mu_2 = \left[\frac{15}{10} \right] = 1$$

$$\mu_3 = \left[\frac{24}{10} \right] = 2$$

Dann erhält man für die λ-Werte

$$\lambda_1 = \frac{-a_{11}}{\mu_1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lambda_2 = \frac{-a_{12}}{\mu_2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lambda_3 = \frac{-a_{13}}{\mu_3} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\lambda \text{ min} = \max \lambda_j = \max (2, 2, 4) = 4$$

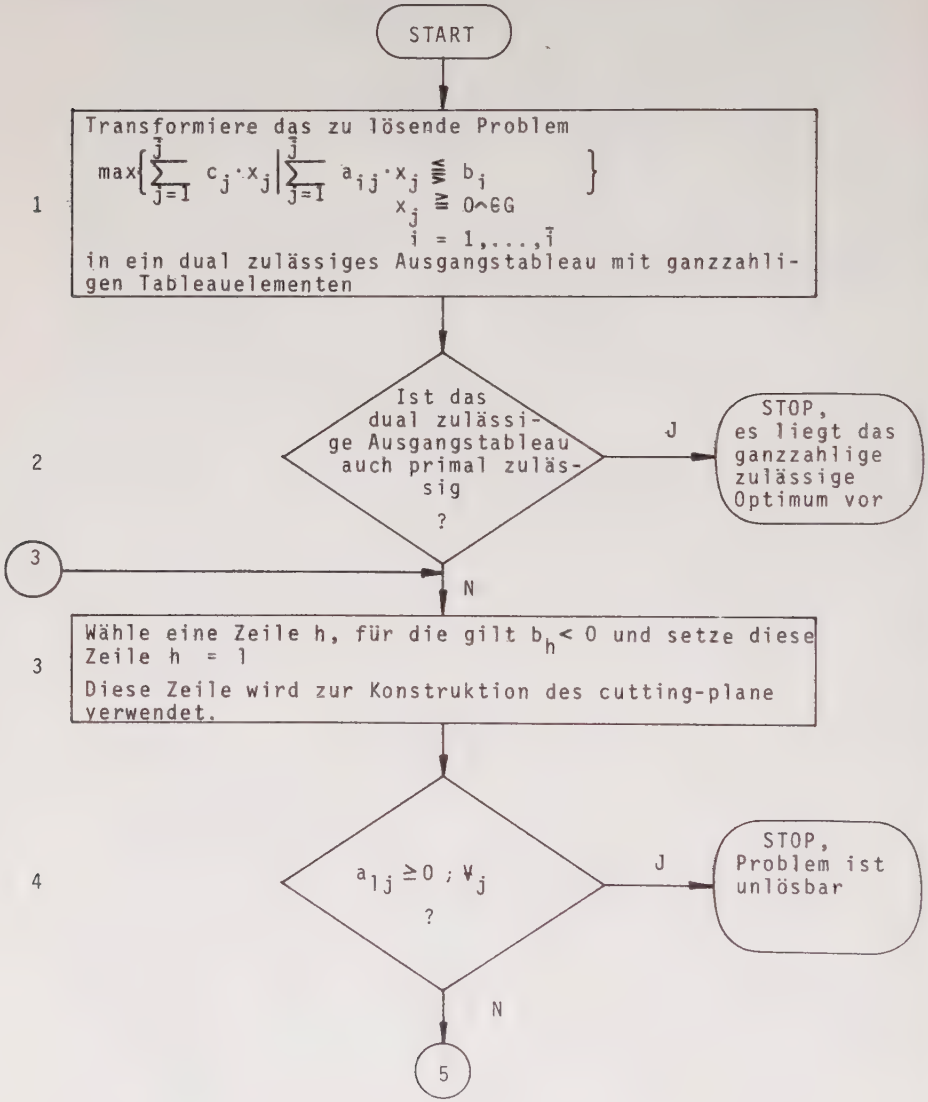
Somit ergibt sich als direkter GOMORY-Schnitt

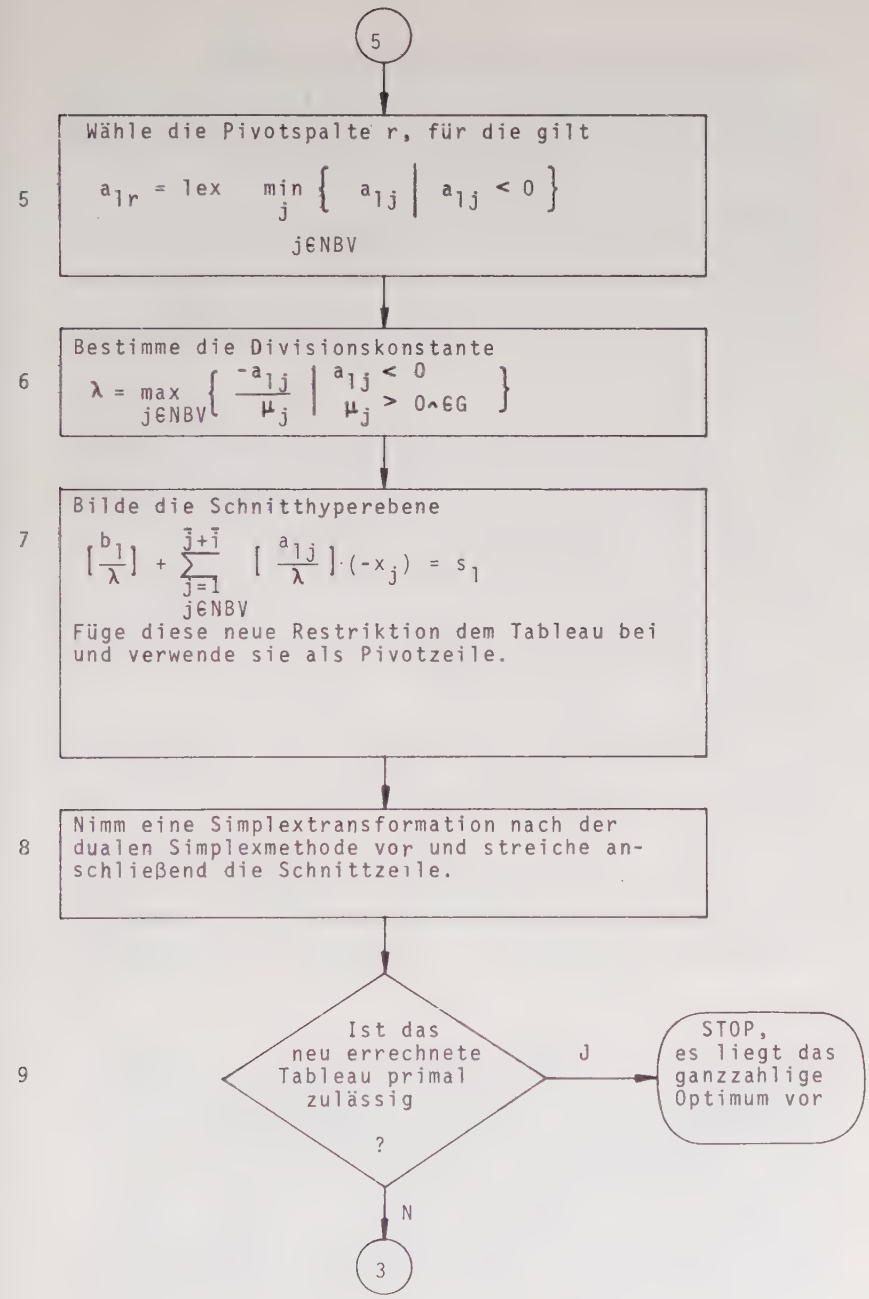
$$s_h = \left[\frac{-15}{4}\right] - \left[\frac{-2}{4}\right] \cdot x_1 - \left[\frac{-2}{4}\right] \cdot x_2 - \left[\frac{-8}{4}\right] \cdot x_3$$

$$s_h = -4 + x_1 + x_2 + 2x_3$$

Dieser Schnitt wird dem Tableau als zusätzliche Zeile hinzugefügt.

Flußdiagramm zum Ablauf des dualen All-integer Integer Algorithmus (GOMORY)




5
Wähle die Pivotspalte r, für die gilt
5
$a_{lr} = \text{lex} \min_{j \in NBV} \left\{ a_{lj} \mid a_{lj} < 0 \right\}$
Bestimme die Divisionskonstante
6
$\lambda = \max_{j \in NBV} \left\{ \frac{-a_{lj}}{\mu_j} \mid \begin{matrix} a_{lj} < 0 \\ \mu_j > 0 \wedge \in G \end{matrix} \right\}$
Bilde die Schnitthyperebene
7
$\left[\frac{b_l}{\lambda}\right] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} \left[\frac{a_{lj}}{\lambda}\right] \cdot (-x_j) = s_l$
Füge diese neue Restriktion dem Tableau bei und verwende sie als Pivotzeile.
Nimm eine Simplextransformation nach der dualen Simplexmethode vor und streiche anschließend die Schnittzeile.
8
Ist das neu errechnete Tableau primal zulässig ?
9
J
STOP, es liegt das ganzzahlige Optimum vor
N
3

43334 Vergleich der beiden Verfahren von GOMORY

Wegen der erheblichen Anzahl von ganzzahlig geforderten Variablen und einer Vielzahl von Restriktionen - auch schon bei kleineren Investitions- und Finanzierungsproblemen[1]- erfordert die Lösung simultan zu berechnender Investitions- und Finanzierungsprogramme die Inanspruchnahme einer EDV - Anlage, so daß der Rechenaufwand der einzelnen Lösungsverfahren für die Anwendung auf die angesprochenen Probleme mitbestimmend ist.
Der Rechenaufwand[2], der sich in den Rechenzeiten und dem erforderlichen Speicherbedarf für die rechennotwendigen Größen niederschlägt, ist bei den Schnitthyperebenenverfahren immer dann sehr groß, wenn viele Iterationsschritte zum Erreichen des Optimums notwendig sind.
Beim Fractional Integer Programming Algorithm wird zunächst die gemischtzahlige Lösung ohne Berücksichtigung der Ganzzahligkeitsbedingung berechnet.
Der Rechenaufwand hierfür kann bereits bei großer Variablenzahl und/oder Anzahl von Restriktionen recht beträchtlich sein, da bei jeder Pivotoperation $(\overline{J}+1)\cdot(\overline{I}+1)$ Multiplikationen und $\overline{J}\cdot\overline{I}$ Additionen bzw. Subtraktionen bei $\overline{J}$-Variablen und $\overline{I}$-Nebenbedingungen durchzuführen sind.

Durch die zusätzliche Einführung der GOMORY - Schnitte und die dadurch bedingten Operationen nach der dualen Simplexmethode, die auch beim All-Integer Algorithm An-

---

[1] Schon bei dem in Kapitel 44 dargestellten, verhältnismäßig kleinen vierperiodigen Planungsproblem können 18 Modellvariable ganzzahlig gefordert sein, so daß bei praktischen Investitions- und Finanzierungsproblemen eine manuelle Berechnung der Investitions- und Finanzierungsprogramme ausscheidet.

[2] Notwendige Voraussetzung für einen begrenzten Rechenaufwand ist die Endlichkeit des betrachteten Verfahrens; andererseits garantiert die Endlichkeit des Verfahrens allein noch nicht einen wirtschaftlich vertretbaren Rechenaufwand.

wendung findet, erhöht sich der Rechenaufwand erheblich[1], da bei jedem Schnitt eine neue Zeile und Spalte zusätzlich in das Tableau eingeführt werden.

Der Vorzug des All-Integer Algorithm gegenüber dem Fractional Integer Programming Algorithm besteht darin, daß die Berechnung des gemischtzahligen Optimums entfällt, da die Konstruktion der Schnitthyperebenen im Ausgangstableau erfolgt.

In Testbeispielen hat sich gezeigt, daß der Fractional Integer Programming Algorithm besser als der All-Integer Algorithm[2] konvergiert. Dadurch lassen sich mit dem zuerst genannten Verfahren größere Probleme als mit dem All-Integer Algorithm lösen. Als weiterer Vorteil ist auch die Möglichkeit der Einfügung mehrerer Schnitte in ein Tableau anzusehen; dies ist bei dem All-Integer Algorithm bisher nicht möglich.

Von einem wesentlichen Unterschied beider Verfahren in bezug auf den Rechenaufwand kann dennoch nicht gesprochen werden[3].

Durch die bedingte endliche Rechengenauigkeit bei der Verwendung elektronischer Rechenanlagen zur Lösung mathematisch formulierter Probleme kommt auch dem Problem der Rundungsfehler Bedeutung zu. Rundungsfehler treten

---

[1] Eine Untersuchung des Rechenaufwandes für die beiden GOMORY-Verfahren findet sich bei LINDNER, L.: Grundlagen und Bedeutung von Algorithmen zur ganzzahligen linearen Programmierung, a.a.O., S. 41 f und S. 97 f. Eine Übersicht von Arbeiten über Rechenexperimente mit Schnitthyperebenenverfahren geben KORBUT, A.A., FINKELSTEIN, J.J.: Diskrete Optimierung, a.a.O., S. 148 ff.

[2] Vgl. die Untersuchungen in KORTE, B.: Ganzzahlige Programmierung - Ein Überblick, a.a.O., S. 94.

[3] Vgl. LINDNER, L.: Grundlagen und Bedeutung von Algorithmen zur ganzzahligen linearen Programmierung, a.a.O., S. 97.

bei Multiplikationen und Divisionen auf und setzen sich bei mehreren Rechenoperationen kumulativ fort.

Die Lösung eines Problems mit Hilfe des Simplexverfahrens bzw. der dualen Simplexmethode läßt Rundungsfehler lediglich bei Pivotoperationen entstehen.

Da eine Simplextransformation rechentechnisch einem Eliminationsschritt bei der Lösung linearer Gleichungssysteme nach dem GAUSS'schen Algorithmus entspricht, liegt hier die gleiche Fehlerbetrachtung[1] wie beim GAUSS'schen Algorithmus zugrunde.[2]

Durch die Forderung der Ganzzahligkeit bei den angesprochenen Verfahren kommt dem Problem der Rundungsfehler deshalb eine erhöhte Bedeutung zu, weil im Rechenverfahren - wie erwähnt - häufig entschieden werden muß, ob ein Wert, der nahe an einer ganzen Zahl liegt, allein durch Rundungsfehler nicht ganzzahlig oder tatsächlich nicht ganzzahlig ist.

Andererseits kann durch Rundung bzw. Rechenungenauigkeit eine nicht ganzzahlige Lösung als ganzzahlige Lösung ausgewiesen werden.

Der Vorteil des Fractional Programming Integer Algorithm, der bei der Betrachtung der Konvergenz der Verfahren gegenüber dem All-Integer Algorithm festgestellt werden konnte, wird durch das Problem der Rundungsfehler stark gemindert.

---

[1] Eine kritische Auseinandersetzung mit Rundungsfehlern findet man bei BAUER, F.L.: Genauigkeitsfragen bei der Lösung linearer Gleichungssysteme. In: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Jg. 46 (1966), S. 409-421.

[2] Vgl. ENDEBROCK, P.: Methoden und Anwendung der gemischtganzzahligen Optimierung. Diplomarbeit, o.J., Hannover, S. 43.

Durch die Wahl des Pivotelementes ($\left[\frac{a_{lr}}{\lambda}\right] = -1$) beim All-Integer Verfahren werden nur Rechenoperationen in Form von Additionen und Subtraktionen durchgeführt, so daß bei Unterstellung eines ganzzahligen Ausgangstableaus die Ganzzahligkeit der Matrixelemente stets erhalten bleibt und somit Rundungsfehler ausgeschlossen werden.

4334 Verfahren von DANTZIG[1]

43341 Beschreibung des Verfahrens

Beim Schnitthyperebenenverfahren von DANTZIG zur Bestimmung ganzzahliger Lösungen wird zunächst - wie beim Fractional Integer Programming Algorithm - mit Hilfe der Simplexmethode das gemischtzahlige Optimaltableau errechnet.

Erfüllt die Optimallösung nicht die Ganzzahligkeitsbedingungen, so hat im ganzzahligen Optimum mindestens eine Nichtbasisvariable des gemischtzahligen Optimums einen positiven Wert, der wegen der Ganzzahligkeitsbedingung der betrachteten Nichtbasisvariablen ≥ 1 sein muß.

Im gemischtzahligen Optimum läßt sich jedoch noch nicht entscheiden, welche Nichtbasisvariable im nächsten Tableau zur Basisvariablen wird und einen Wert ≥ 1 annimmt.

Aus dieser Forderung ergibt sich der DANTZIG-Schnitt. Dieser Schnitt wird als zusätzliche Restriktion dem zuletzt berechneten Tableau hinzugefügt, wodurch die vorher ermittelte Lösung unzulässig wird.

---

[1] Vgl. DANTZIG, G.B.: Note on Solving Linear Programs in Integers. In: Naval Research Logistics Quarterly. Vol. 6 (1959), S. 75 f. STUHR, R.: Anwendungen und Lösungsverfahren der ganzzahligen linearen Programmierung, a.a.O., S. 157 ff.

Die nächste Lösung wird dann nach den Regeln der dualen Simplexmethode berechnet. Das Verfahren ist beendet, wenn die optimale Lösung zulässig ist und ausschließlich ganzzahlige Lösungswerte enthält.

43342 Konstruktion der Schnitthyperebene

Betrachtet man das gemischtzahlige Optimaltableau, so lautet eine Zeile h

$$x_{hj} = \bar{b}_h + \sum_{\substack{j=\bar{1} \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} \bar{a}_{hj} \, (-x_j); \qquad \bar{b}_h > 0 \wedge \notin G$$

In der gemischtzahligen Optimallösung sind alle Nichtbasisvariablen Null ($x_j = 0; \; \forall \, j \in NBV$).

Soll obige Restriktion, die von den gemischtzahligen Optimalwerten erfüllt wird, gleichzeitig den zulässigen ganzzahligen Lösungswerten genügen, muß mindestens eine Nichtbasisvariable der gemischtzahligen Optimallösung zur Basisvariablen des Ganzzahligkeitsoptimums werden[1], so daß wegen der Nichtnegativität der Variablen und der Ganzzahligkeitsforderung die Bedingung

(433421)

$$\sum_{\substack{j=\bar{1} \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} x_j \geq 1$$

gilt.

---

[1] Vom Fall der Degeneration soll hier abgesehen werden.

Wird die Gleichung mit (-1) multipliziert, erhält man die Beziehung

(433421a)

$$-\sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} x_j \leqq -1$$

Durch Hinzufügen der Schlupfvariablen s_h ergibt sich der DANTZIG-Schnitt in folgender Form:

(433421b)

$$-\sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} x_j + s_h = -1$$

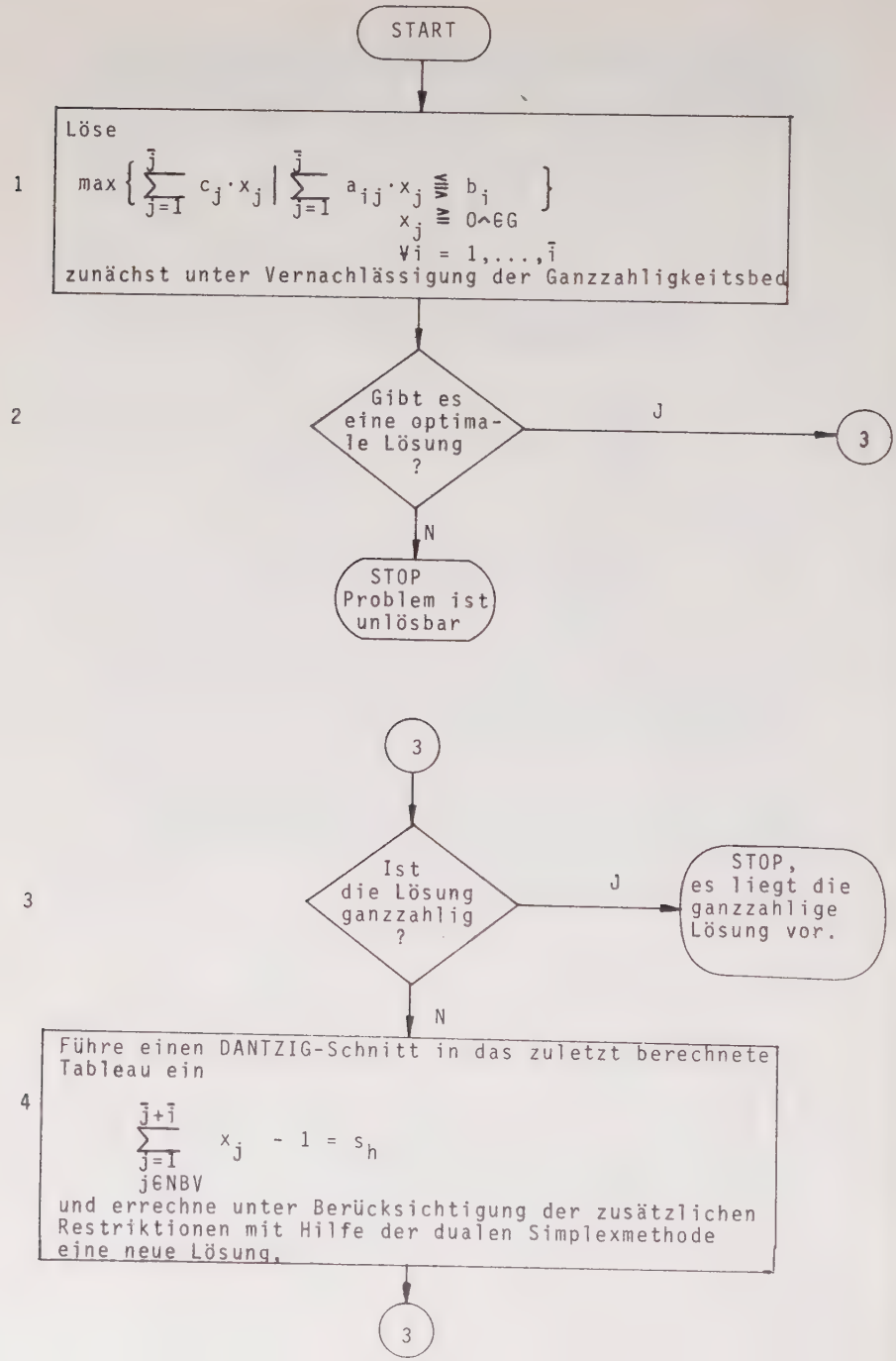
bzw.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} x_j - 1 = s_h$$

Diese zusätzliche Restriktion wird dem gemischtzahligen Optimaltableau hinzugefügt.

Durch die neue Restriktion bleibt die gemischtzahlige Optimallösung zwar optimal, wird aber unzulässig, so daß mit Hilfe der dualen Simplexmethode eine neue zulässige Lösung angestrebt wird.

Flußdiagramm zum Ablauf des Verfahrens DANTZIG



43343 Beurteilung des Verfahrens DANTZIG

Der formale Ablauf des Verfahrens von DANTZIG ähnelt dem zuerst beschriebenen GOMORY-Verfahren, wobei jedoch die Konstruktion der Schnittebenen unterschiedlich ist.

Die zusätzlichen Restriktionen, die durch die DANTZIG-Schnitte erzeugt werden, bewirken nur eine sehr schwache Veränderung des Zielwertes und damit nur geringfügige Verkleinerungen des Restriktionsfeldes[1].

Dadurch wird die Konvergenz des Verfahrens nicht gesichert[2], so daß eine Anwendung zur Lösung größerer ganzzahliger finanzwirtschaftlicher Investitionsmodelle unzweckmäßig ist und das Verfahren der weiteren Betrachtung nicht mehr unterliegt.

---

1 Vgl. STUHR, R.: Anwendung und Lösungsverfahren der ganzzahligen linearen Programmierung, a.a.O., S. 160. Ein von STUHR nach dem Fractional Integer Programming Algorithm gerechnetes Beispiel, das nach Einführung weniger Schnitte zur ganzzahligen Optimallösung führte, liefert bei Anwendung des Verfahrens DANTZIG nach 150 Iterationsschritten immer noch keine Lösung.

2 KORBUT/FINKELSTEIN zeigen die mangelnde Endlichkeit des Verfahrens an einem kleinen Beispiel. Vgl. KORBUT, A.A., FINKELSTEIN, J.J.: Diskrete Optimierung, a.a.O., S. 121. Vgl. auch GOMORY, R.E., HOFFMANN, A.J.: On the Convergence of an Integer-Programming Process. In: Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 1o (1963), S. 121-123. BOWMAN und NEMHAUSER sowie RUBIN und GRAVES haben den DANTZIG-Schnitt so weit verändert, daß das Verfahren konvergiert.
Modifizierter DANTZIG-Schnitt:

$$\sum_{j \in NBV} \varrho_{ij} \cdot x_j \geqq 1$$

$$\varrho_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ wenn } \bar{a}_{ij} \in G \\ 0, \text{ wenn } \bar{a}_{ij} \notin G \end{cases}$$

Für diesen Schnitt bestehen jedoch noch keine Rechenerfahrungen. Vgl. BOWMAN, V.J., NEMHAUSER, G.L.: Deep Cuts in Integer Programming. Core Discussion Paper No. 6925, a.a.O. RUBIN, D.S., GRAVES, R.L.: The Modified DANTZIG Cuts for Integer Programming. Working Paper. Presented at the 7th Mathematical Programming Symposium. The Hague 1970. Zitiert nach KORTE, B.: Ganzzahlige Programmierung - Ein Überblick, a.a.O., S. 97. BOWMAN, V.J., NEMHAUSER, G.L.: A Finiteness Proof for Modified DANTZIG Cuts in Integer Programming. In: Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 17 (1970), S. 309-313.

4335 Primaler All-integer Integer Algorithmus

43351 Beschreibung des Verfahrens

Das primale Schnitthyperebenenverfahren, das zunächst auf BEN-ISRAEL und CHARNES[1] zurückgeht und von YOUNG[2] und GLOVER[3] weiterentwickelt wurde, ähnelt äußerlich durch die stets ganzzahligen Tableauelemente dem All-Integer Algorithm von GOMORY.
Während jedoch beim GOMORY-Verfahren die Lösung stets dual zulässig und ganzzahlig ist, wobei die primale Zulässigkeit und somit das ganzzahlige zulässige Optimum angestrebt wird, geht das Verfahren von YOUNG von einem primal zulässigen, ganzzahligen Tableau aus, das unter Aufrechterhaltung der Zulässigkeit und Ganzzahligkeit im Hinblick auf das Optimum mit jedem Iterationsschritt verbessert werden soll.
Dabei werden Schnitthyperebenen konstruiert, die stets ganzzahlige Lösungsvektoren erzeugen. Durch die Beibehaltung ganzzahliger Tableauelemente bei jedem Iterationsschritt, können nur rein ganzzahlige Optimierungsprobleme gelöst werden.
Das Verfahren geht von einem primal zulässigen Tableau aus[4], dessen Elemente durch entsprechende Multiplikation der Zeilen ganzzahlig werden, so daß für jedes Tableau

---

1 Vgl. BEN-ISRAEL, A., CHARNES, A.: On Some Problems of Diophantine Programming. In: Cahiers du Centre L'Etudes de Recherche Operationelle, Jg. 4 (1962), S. 215-280, bes. S. 248 ff.

2 YOUNG, R.D.: A Primal (All-integer) Integer Programming Algorithm. In: Journal of Research of the National Bureau of Standards 69 B (1965), S. 213-250. YOUNG,R.D.: A Simplified Primal (All-integer) Integer Programming Algorithm, a.a.O., S. 75o-782.

3 GLOVER, F.: A New Foundation For A Simplified Primal Integer Programming Algorithm, a.a.O., S. 727-740. Das Verfahren von GLOVER ähnelt dem beschriebenen Verfahren von YOUNG weitgehend; es unterscheidet sich vor allem in der Auswahlregel für die Pivotspalte während des Iterationsvorganges.

4 Bei Maximierungsproblemen mit ausschließlich 'kleiner/gleich' Bedingungen stellt das primal zulässige Ausgangstableau stets die Nullösung dar.

$$\bar{b}_i \geq 0 \wedge \in G, \qquad \forall\, i = 1, .., \bar{i}$$

und $\bar{a}_{ij} \in G \qquad \forall\, i = 1, .., \bar{i}$

$j \in NBV \qquad \forall\, j = 1, .., \bar{j}$

gilt.

Durch die Konstruktion einer Schnitthyperebene[1], deren Gleichung dem letzten Tableau als zusätzliche Zeile hinzugefügt wird, verkleinert sich der ursprüngliche Beschränkungsbereich.
Die Optimierung des durch die zusätzliche Restriktion vergrößerten Systems ergibt wiederum eine zulässige ganzzahlige Lösung. Erfüllt diese Lösung das Simplexkriterium, liegt gleichzeitig die ganzzahlige Optimallösung vor. Ist die Optimalität nicht gegeben, wird eine weitere Schnittebene konstruiert.

43352 Konstruktion der Schnitthyperebene

Betrachtet wird ein zulässiges Ausgangstableau, in dem alle Tableauelemente ganzzahlig sind.[2]

Die den cutting-plane erzeugende Schnittzeile berechnet sich nach den Regeln der regulären Simplexmethode in der Form

$$\frac{b_l}{a_{lr}} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ir}} \;\middle|\; a_{ir} > 0, \quad \forall\, i = 1, .., \bar{i} \right\}$$

Sei

$$x_{lj} = b_l + \sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} a_{lj}\,(-x_j) \geq 0$$ die ermittelte Schnittzeile, so werden wie beim zuletzt beschriebenen GOMORY-Verfahren zunächst alle Koeffizienten der Zeile l durch

---

[1] Vgl. Kapitel 43352.

[2] Die Ganzzahligkeit der Elemente kann durch geeignete Multiplikation der Tableauzeilen hergestellt werden.

eine Konstante dividiert und der daraus entstehende ganzzahlige Schnitt unter Einführung der Schlupfvariablen s_l betrachtet[1].

(432322a)

$$\left[\frac{b_l}{\lambda}\right] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{J}+\bar{I}} \left[\frac{a_{lj}}{\lambda}\right] \cdot (-x_j) = s_l \; ; \quad s_l \geq 0 \wedge \in G$$

Durch die beschriebene Auswahl der Schnittzeile wird die primale Zulässigkeit gesichert ($\bar{b}_l \geq 0$), so daß die Auswahl des Pivotelementes lediglich noch die Forderung nach Erhaltung der ganzzahligen Tableauelemente zu tolerieren hat.

Diese Forderung ist dann erfüllt, wenn

$$\bar{a}_{lr} = \left[\frac{a_{lr}}{\lambda}\right] = 1; \text{ d.h. } \lambda = \left\{a_{lr} \mid a_{lr} > 0\right\}$$

so daß

$$\bar{a}_{lr} = \left[\frac{a_{lr}}{a_{lr}}\right] = 1$$

Dadurch geht die Schnittebene in die Form

$$\left[\frac{b_l}{a_{lr}}\right] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{J}+\bar{I}} \left[\frac{a_{lj}}{a_{lr}}\right] \cdot (-x_j) = s_l \; ; \; s_l \geq 0 \wedge \in G$$

über.

Diese von allen zulässigen ganzzahligen Lösungspunkten erfüllte Restriktion[2] wird dem primal zulässigen Tableau hinzugefügt und mit Hilfe der Simplexmethode kann ein neues Tableau errechnet werden.

---

[1] Vgl. auch S. 208

[2] Der Beweis wurde schon für einen allgemeinen Wert von λ auf S. 208 beim dualen All-integer Integer Algorithmus von GOMORY erbracht.

Die Erzeugung des Schnittes soll an einem Beispiel verdeutlicht werden.
Geht man von einer Schnittzeile im Tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}_i$
x_4	4	1	0	1	2	0	15

aus, so läßt sich diese Zeile als Gleichung

$$4x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 = 15$$

beschreiben.

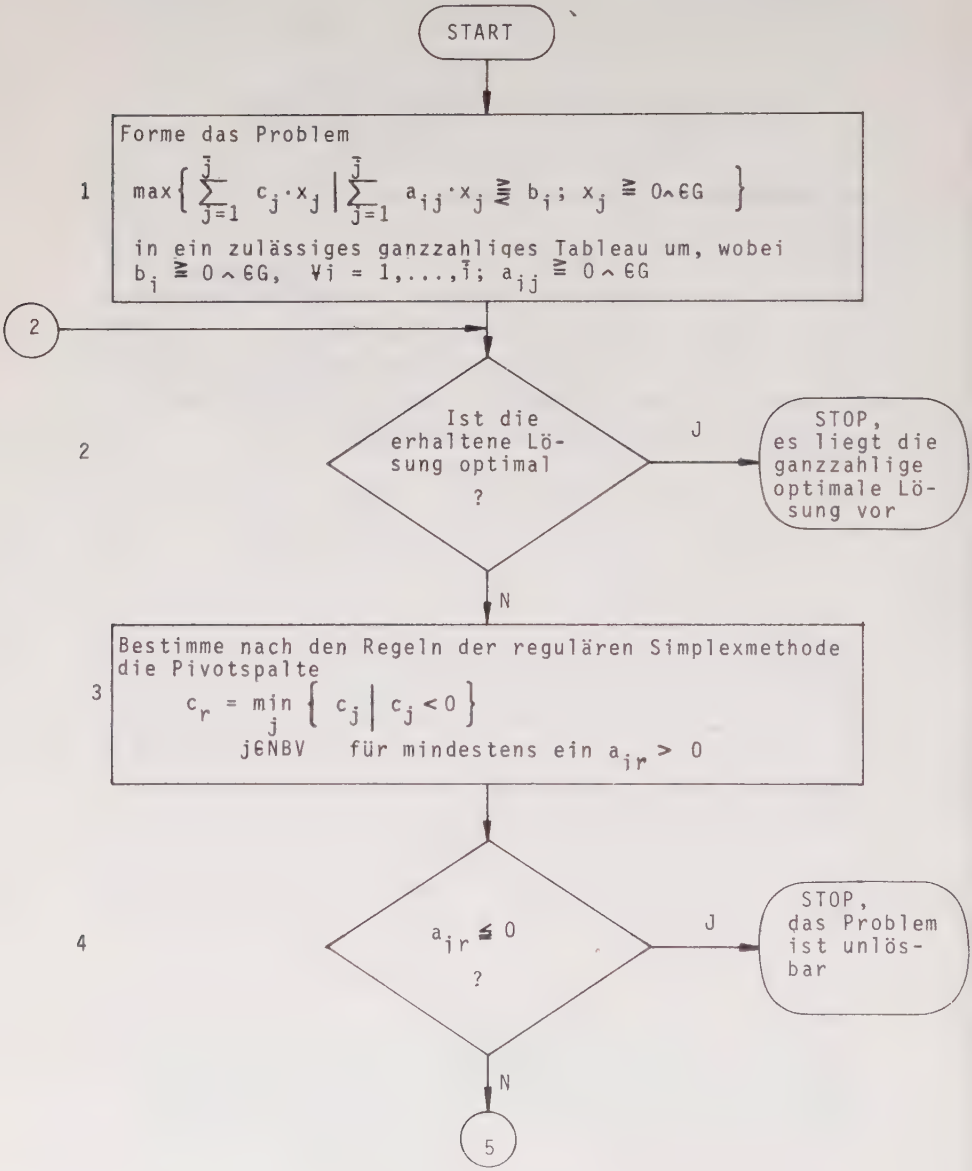
Ist die erste Spalte als Pivotspalte ermittelt, so wird die ganze Zeile durch die Divisionskonstante 'Vier' dividiert und die dadurch erhaltenen neuen Koeffizienten auf die nächst kleinere ganze Zahl gerundet:

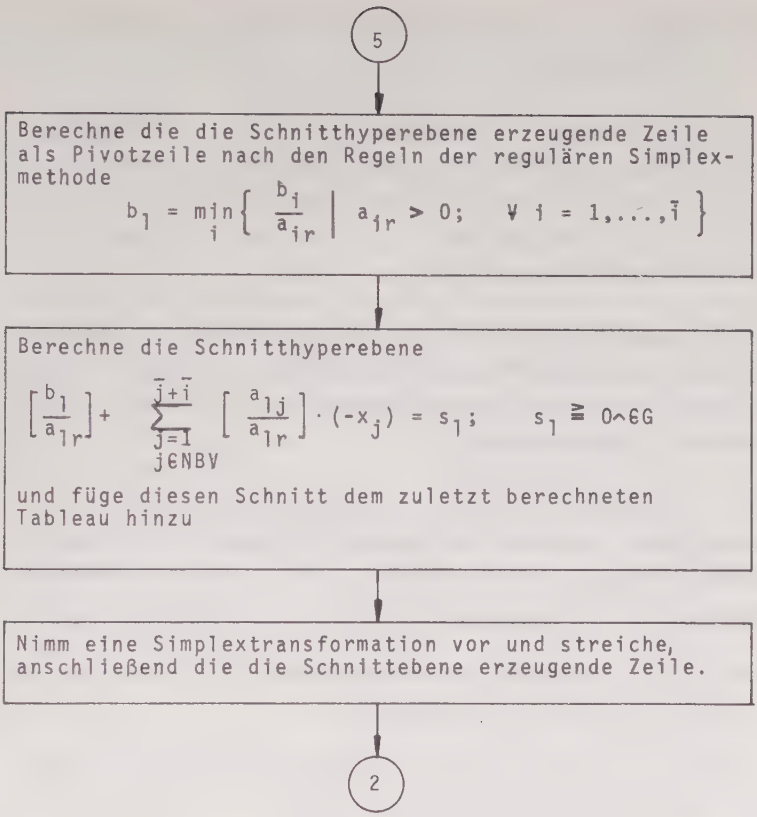
$$\left[\frac{4}{4}\right] x_1 + \left[\frac{1}{4}\right] x_2 + \left[\frac{1}{4}\right] x_4 + \left[\frac{2}{4}\right] x_5 = \left[\frac{15}{4}\right]$$

$$x_1 = 3$$

Unter Berücksichtigung der Schlupfvariablen s_1 wird die neue Restriktion $x_1 + s_1 = 3$ oder $s_1 = 3 - x_1$ als zusätzliche Zeile in das zuletzt berechnete Tableau eingefügt. Die Optimierung des hierdurch erweiterten Problems liefert eine neue ganzzahlige Lösung.

Flußdiagramm zum Ablauf des primalen All-integer Integer Algorithmus




5
Berechne die die Schnitthyperebene erzeugende Zeile als Pivotzeile nach den Regeln der regulären Simplexmethode
5
$b_l = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ir}} \mid a_{ir} > 0; \quad \forall i = 1,\ldots,\bar{i} \right\}$
Berechne die Schnitthyperebene
6
$\left[\frac{b_l}{a_{lr}}\right]+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} \left[\frac{a_{lj}}{a_{lr}}\right] \cdot (-x_j) = s_l; \quad s_l \geqq 0 \wedge \in G$
und füge diesen Schnitt dem zuletzt berechneten Tableau hinzu
7
Nimm eine Simplextransformation vor und streiche, anschließend die die Schnittebene erzeugende Zeile.
2

43353 Beurteilung des primalen All-integer Integer Algorithmus

Durch die stete primale Zulässigkeit aller Tableaus und die Ganzzahligkeit der Tableauelemente auch während der Iterationsprozesse hat das Verfahren den großen Vorteil, daß jedes Zwischentableau eine suboptimale zulässige und ganzzahlige Lösung liefert.

Die Verwendung suboptimaler zulässiger Lösungen kann bei großen Problemen von erheblichem Wert sein, wenn die Berechnung des ganzzahligen Optimums aus rechenaufwendigen Gründen ausgeschlossen ist.

Ein schwerwiegender Nachteil des Verfahrens, der eine Anwendung auch auf größere simultane Investitions- und Finanzierungsmodelle ausschließt, besteht in der mangelnden Konvergenz[1].

Ist $\left[\frac{b_l}{a_{lr}}\right] = 0$, wird der neue Lösungswert $\bar{b}_l = 0$, d.h. es liegt der Fall der Degeneration vor.

In dieser Situation erfährt der Zielwert durch eine Simplextransformation keine Änderung.
Die Zielwertänderung[2] läßt sich durch

$$\left|\bar{Z}-Z_o\right| = \left|\left[\frac{b_l}{\lambda}\right] \cdot c_r\right| \qquad \begin{array}{l} l = \text{Pivotzeile} \\ r = \text{Pivotspalte} \end{array}$$

darstellen.

Für $\lambda = a_{lr}$ geht der Ausdruck in

$$\left|\bar{Z}-Z_o\right| = \left|\left[\frac{b_l}{a_{lr}}\right] \cdot c_r\right|$$ über, so daß für den Fall $\left[\frac{b_l}{a_{lr}}\right] = 0$ die Zielwertänderung Null beträgt.

---

[1] Vgl. auch KREUZBERGER, H.: Verfahren zur Lösung ganzzahliger linearer Optimierungsprobleme, a.a.O., S. 46.

[2] Vgl. S.212

Eine absolut positive Zielwertänderung liegt also nur dann vor, wenn $\left|\left[\frac{b_1}{a_{1r}}\right]\right| \geq 1$; anderenfalls treten stationäre Zyklen[1] auf, die dadurch gekennzeichnet sind, daß weder der Zielwert noch die Lösungswerte eine Änderung erfahren, obwohl die Optimallösung noch nicht erreicht ist.

Schon bei der Berechnung kleinerer Probleme trat in einigen Fällen ein mehrfacher Zyklus auf[2]. Die optimale ganzzahlige Lösung konnte hier erst nach übermäßig vielen Iterationsschritten, die vor allem zur Überwindung der Zyklen notwendig wurden, erreicht werden; dadurch ergaben sich verhältnismäßig hohe Rechenzeiten.

Obwohl YOUNG[3] und GLOVER[4] eine Erweiterung des Verfahrens vorgenommen haben, indem kompliziertere Auswahlkriterien für die Pivotzeile und die Pivotspalte abgeleitet wurden, die die Endlichkeit des Verfahrens garantieren, können noch keine befriedigenden Testergebnisse vorgewiesen werden[5].

---

[1] Vgl. YOUNG, R.D.: A Simplified Primal (All-integer) Integer Programming Algorithm, a.a.O., S. 750-782, hier S. 756.

[2] Vgl. Beispiel bei YOUNG, R.D.: A Simplified Primal (All-integer) Integer Programming, a.a.O., S. 762 ff. Außerdem vgl. GREENBERG, H.: Integer Programming, a.a.O., S. 77.

[3] Vgl. YOUNG, R.D.: A Simplified Primal (All-integer) Integer Programming, a.a.O., S. 750-782.

[4] Vgl. GLOVER, F.: A New Foundation For A Simplified Primal Integer Programming Algorithm, a.a.O., S. 730 ff.

[5] Vgl. KORTE, B.: Ganzzahlige Programmierung - Ein Überblick, a.a.O., S. 100.

4336 Verfahren des Intersection-cut

43361 Beschreibung des Verfahrens

Eine neue Art von Schnittebenenverfahren, die sich in der Konstruktion der cutting-planes von den beschriebenen Verfahren wesentlich unterscheiden, wurde von BALAS[1] entwickelt.

Die Schnitthyperebenen werden nicht wie gewohnt aus dem Restriktionssystem des Problems abgeleitet, sondern die Konstruktion erfolgt durch den Schnitt zweier konvexer Körper.

Der formale Ablauf des Verfahrens entspricht nach der Konstruktion der Schnitte in groben Zügen dem Vorgehen des Fractional Integer Programming Algorithm.

Zu lösen sei das Problem

(432211)

$$\left\{ \max \sum_{j=1}^{J} c_j \cdot x_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{J} a_{ij} \cdot x_j \leqq b_i ;\; x_j \geqq 0 \wedge \in G \quad \forall i = 1, .., I \right\},$$

das zunächst mit der Simplexmethode unter Vernachlässigung der Ganzzahligkeit gelöst wird.

---

[1] Vgl. BALAS, E.: Intersection Cuts - A New Type of Cutting Planes for Integer Programming. In: Operations Research, Vol. 19 (1971), S. 19-39. BALAS, E.: Integer Programming and Convex Analysis: Intersection Cuts from Outer Polars. In: Mathematical Programming, Vol. 2 (1972), S. 330-382, bes. S. 330-335. GLOVER, F.: Cut Search Methods in Integer Programming. In: Mathematical Programming, Vol. 3 (1972), S. 86-100. Zur Konstruktion von Schnitthyperebenen mit Hilfe unregelmäßiger konvexer Körper, die zu den sogenannten 'diamont-cuts' führen vgl. BURDET, C.-A.: Enumerative Inequalities in Integer Programming. In: Mathematical Programming, Vol. 2 (1972), S. 32-64.

Bei einer nichtganzzahligen Optimallösung wird um den Lösungsvektor X^0 ein Kubus mit der Kantenlänge von Eins derart gelegt, daß die Eckpunkte[1] des Kubus durch benachbarte ganzzahlige Koordinaten beschrieben werden.

Dadurch können innerhalb des Kubus keine zulässigen ganzzahligen Lösungspunkte enthalten sein, so daß der optimale Lösungspunkt entweder auf den Kanten oder außerhalb des konvexen Körpers zu finden ist.

Der Kubus wird von einer Kugel umschrieben, deren Mittelpunkt in M durch die Koordinaten $([\overline{b}] + \frac{e}{2})$ determiniert ist, wobei der Vektor $[\overline{b}]'$ aus den Elementen[2] $([\overline{b}_1], \ldots, [\overline{b}_T])$ und der Vektor e' aus den Elementen (1, .., 1) bestehen[3].

Die Schnittpunkte der Kugeloberfläche mit den restriktiv wirkenden Halbgeraden des konvexen Beschränkungspolyeders sind Punkte einer Hyperebene, die den von BALAS publizierten Intersection-cut darstellt.

Die Konstruktion der Schnitthyperebene läßt sich graphisch zeigen[4]:

---

[1] Vgl. die ganzzahligen Eckpunkte A,B,C,D der Abb. 1o auf S. 236.
Bei der Betrachtung wird davon ausgegangen, daß ein dreidimensionales Problem zugrunde liegt.

[2] Der Ausdruck in der eckigen Klammer gibt den nächstkleineren ganzzahligen Wert des gemischtzahligen Lösungswertes an.

[3] Entsprechend der Kubuskonstruktion können auch im Inneren der Kugel nur nichtganzzahlige Lösungspunkte liegen, so daß durch die Verwendung der Kugel keine ganzzahligen zulässigen Lösungspunkte abgeschnitten werden.

[4] Vgl. BALAS, E.: Intersection Cuts - A New Type of Cutting Planes for Integer Programming, a.a.O., S. 22.

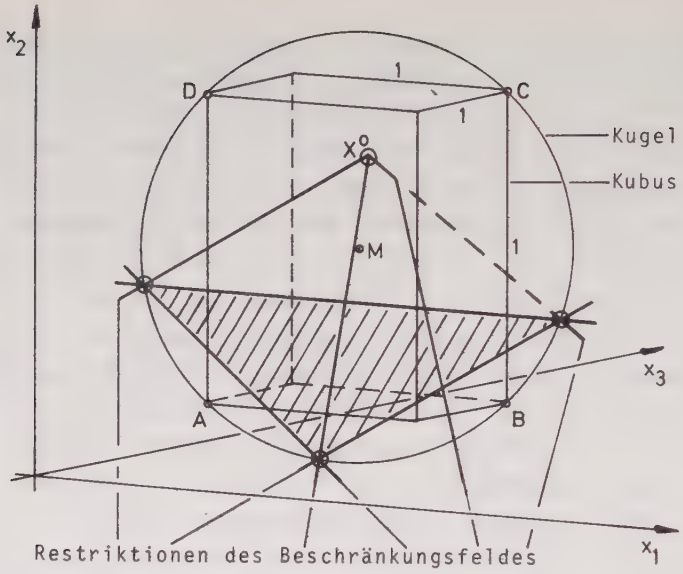


Abb. 1o

Als Vorläufer dieses cutting-plane wurde eine Schnitthyperebene konstruiert[1], die durch die Schnittpunkte des Kubus mit den Halbgeraden läuft. Dieser Schnitt, der auch wie alle anderen betrachteten Schnitte keine ganzzahligen zulässigen Lösungspunkte eliminiert, wirkt jedoch nicht so tief wie die zuvor beschriebene Schnittrestriktion.

Die Darstellung eines tiefer wirkenden Schnittkörpers als die bisher beschriebenen Intersection-cuts gelang

---

[1] Vgl. BALAS, E.: The Intersection Cut. - A New Cutting Plane for Integer Programming. Management Science Research Report no. 187. Carnegie-Mellon University, Okt. 1969 zitiert nach KORTE, B.: Ganzzahlige Programmierung - Ein Oberblick, a.a.O., S. 1o3.

BALAS, BOWMAN, GLOVER, SOMMER[1] durch die Verwendung von 'Hyperoktaedern'[2] als Schnitthyperebenen.

Dabei wird die zur Konstruktion des Intersection-cut verwendete umschreibende Kugel durch einen weiteren Kubus selbst umschrieben, dessen Mittelpunktkoordinaten mit denen der Kugel identisch sind und auf dessen Kanten die Ecken des inneren Kubus liegen.

Die durch die Schnittpunkte des äußeren Kubus mit den restriktiv wirkenden Halbgeraden des Beschränkungspolyeders festgelegte Schnitthyperebene bildet den modifizierten Intersection-cut.

Einen Vergleich der Schnittiefe der drei beschriebenen Intersection-cuts soll die folgende graphische Darstellung veranschaulichen[3]:

---

[1] Vgl. BALAS, E.; u.a.: An Intersection Cut from the Dual of the Unit Hypercube. In: Operations Research, Vol. 19 (1971), S. 40-44.

[2] Zu dem Begriff vgl. MÖLLER-MERBACH, H.: Modifikationen von Cutting-Plane-Methoden der ganzzahligen Optimierung, a.a.O., S. 773.

[3] Vgl. auch KORTE, B.: Ganzzahlige Programmierung - Ein Überblick, a.a.O., S. 104.

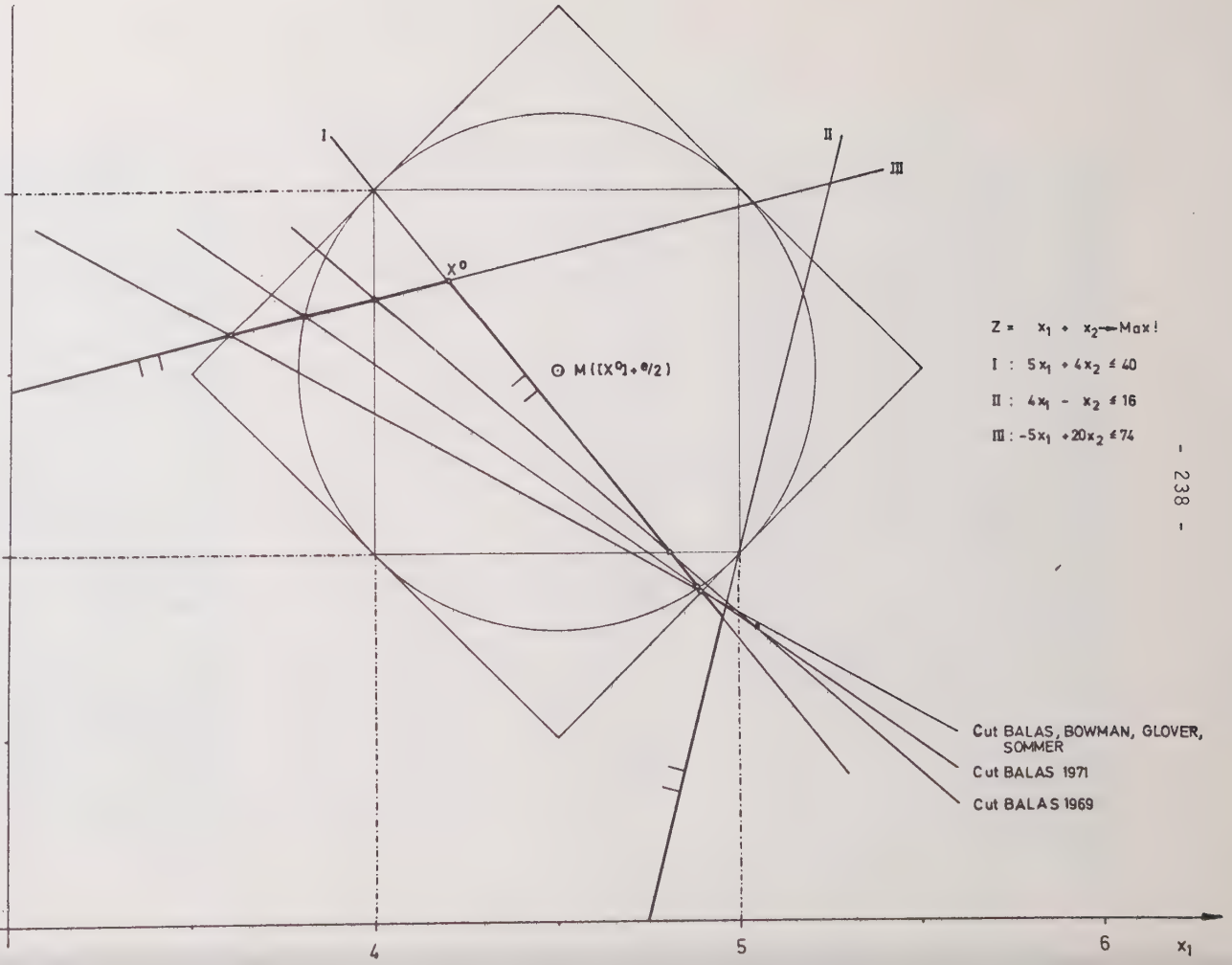

x2
5
4
3
4
5
6
x1
I
II
III
X°
⊙ M([X°]+°/2)
Z = x1 + x2 ⟶ Max!
I : 5x1 + 4x2 ≤ 40
II : 4x1 - x2 ≤ 16
III : -5x1 +20x2 ≤ 74
Cut BALAS, BOWMAN, GLOVER, SOMMER
Cut BALAS 1971
Cut BALAS 1969

Abb. 11

Die Konstruktion eines cutting-plane liefert eine zusätzliche Restriktion, die als neue Zeile in das jeweils zuletzt berechnete Tableau eingefügt wird. Mit Hilfe der dualen Simplexmethode erfolgt die Berechnung eines neuen Lösungstableaus. Bei Ganzzahligkeit des Lösungsvektors bricht das Verfahren ab; anderenfalls wird ein neuer cutting-plane konstruiert und der beschriebene Vorgang wiederholt sich, bis ein ganzzahliger Lösungsvektor gefunden oder seine Nichtexistenz nachgewiesen ist.

43362 Konstruktion der Schnitthyperebene[1]

Betrachtet man das Tableau einer nichtganzzahligen optimalen Lösung, so läßt sich das Gleichungssystem in folgender Vektorschreibweise darstellen

$$X = \bar{X} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} \bar{a}_j \, (-x_j), \quad \text{wobei}$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_{\bar{i}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{a}_j = \begin{pmatrix} \bar{a}_{1j} \\ \vdots \\ \bar{a}_{\bar{i}j} \end{pmatrix}$$

Um den optimalen Lösungsvektor $\bar{X}$ wird ein n-dimensionaler Kubus der ganzzahligen Gitterpunkte mit dem Mittelpunkt $M = [\bar{X}] + \frac{e}{2}$ gelegt[2].

---

[1] Die Herleitung der Schnitthyperebene beschränkt sich auf den von BALAS 1971 veröffentlichten Intersection-cut; vgl. BALAS, E.: Intersection Cuts - A New Type of Cutting Planes for Integer Programming, a.a.O., S. 2o ff.

[2] Sind einige Komponenten von $\bar{X}$ ganzzahlig, so ist die Konstruktion mehrerer Kuben möglich, auf deren Rand $\bar{X}$ liegt. Man wählt dann den Kubus, der die zu betrachtenden Halbgeraden schneidet. Für diese Sonderfälle werden von BALAS besondere Auswahlregeln angegeben, die in Form von Unterprogrammen den auszuwählenden Kubus bestimmen. Auf eine Herleitung dieser Regeln soll hier verzichtet werden. Vgl. BALAS, E.: Intersection Cuts - A New Type of Cutting Planes for Integer Programming, a.a.O., S. 28 ff.

Der Kubus K kann durch die Punktmenge

$$K = (X \mid [\overline{X}] \leqq X \leqq [\overline{X}]` + e)$$

beschrieben werden.

Eine um den Kubus K gelegte Kugel hat ihren Mittelpunkt in $M = [\overline{X}] + \frac{e}{2}$ und weist folgende Vektorgleichung auf:

$$X \cdot (X - 2[\overline{X}] - e) + [\overline{X}] \cdot ([\overline{X}] + e) = 0$$

Diese Form läßt sich folgendermaßen herleiten:
Die Kugelmittelpunktsgleichung für den Mittelpunkt $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ lautet bei Verwendung des Euklidischen Abstandes

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_i)^2 = \underbrace{\frac{n}{4}}_{(\text{Radius})^2}$$

m_i = Mittelpunktskoordinaten der Kugel

$m_i = [\overline{x}_i] + \frac{1}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i m_i + m_i^2) = \frac{n}{4}$$

m_i wird durch $[\overline{x}_i] + \frac{1}{2}$ ersetzt.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i [\overline{x}_i] - x_i + [\overline{x}_i]^2 + [\overline{x}_i] + \tfrac{1}{4}) = \frac{n}{4}$$

Schreibt man das durch die Summe dargestellte Skalarprodukt in Vektorschreibweise, so erhält man

$$X \cdot (X - 2[\overline{X}] - e) + [\overline{X}] \cdot ([\overline{X}] + e) = 0$$

Durch Umformung erhält man

(433621)

$$X \cdot (e + 2[\overline{X}] - X) = [\overline{X}] \cdot ([\overline{X}] + e)$$

Zu betrachten sind die Strahlen - auch Halbgeraden genannt - des Beschränkungspolyeders, deren Schnittpunkt in dem betrachteten nichtganzzahligen Optimum liegt[1,2].

Jede dieser Halbgeraden j wird beschrieben durch eine Vektorgleichung der Form

(433622)

$$h_{(j)} = \overline{X} - \overline{a}_j \cdot \lambda_j ; \quad \lambda_j > 0, \; j \in NBV$$

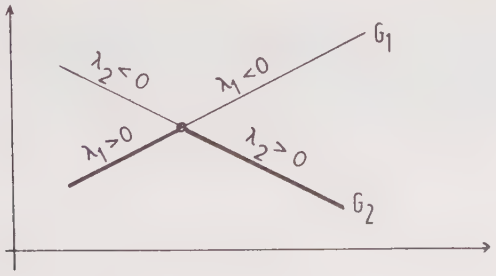
Dabei kennzeichnen $\overline{X}$ und $\overline{a}_j$ die bereits definierten Vektoren und λ_j einen positiven reellen Parameter[3]. Für jeden positiven Wert von λ_j erhält man einen Punkt der beschriebenen Halbgeraden, dessen Koordinaten im Vektor $h_{(j)}$ zusammengefaßt sind.

---

1 Das bedeutet, daß die Beschränkungsgleichungen, die in der betreffenden Optimallösung nicht restriktiv wirken, der Betrachtung zur Bildung der Schnitthyperebene nicht unterliegen.

2 Diese Untersuchung gilt nicht nur für das gemischtzahlige Optimum, sondern für jede weitere nicht ausschließlich ganzzahlige Optimallösung.

3 $\lambda_j > 0$ bedeutet, daß jeweils nur eine Halbgerade der Beschränkungsgeraden G_i betrachtet wird. Das ist jeweils der Teil der Geraden, der für das Problem restriktiv wirkt.



Zu fixieren ist derjenige Wert für λ_j, der als zugehörigen Vektor $h_{(j)}$ gerade den Ortsvektor des Schnittpunktes der Halbgeraden mit der Kugeloberfläche liefert.
Der Ortsvektor $\bar{h}_{(j)}$ des Schnittpunktes genügt sowohl der Gleichung der betrachteten Halbgeraden als auch der Gleichung der Kugeloberfläche, also

(433622a)

$$\bar{h}_{(j)} = \bar{X} - \bar{a}_j \cdot \bar{\lambda}_j \qquad \text{Halbgerade}$$

und

(433621a)

$$\bar{h}_{(j)} \,(e + 2[\bar{X}] - h_{(j)}) = [\bar{X}]([\bar{X}] + e) \quad \text{Kugeloberfläche}$$

Das Gleichungssystem wird durch Einsetzen gelöst.

$$(\bar{X}-\bar{a}_j \cdot \bar{\lambda}_j)\cdot(e + 2[\bar{X}] - (\bar{X}-\bar{a}_j \cdot \bar{\lambda}_j)) = [\bar{X}]([\bar{X}] + e)$$

Durch Umformung erhält man

$$-\bar{a}_j^2\,\bar{\lambda}_j^2 + \bar{a}_j\bar{\lambda}_j \cdot (\bar{X}-e-2[\bar{X}] + \bar{X}) + \bar{X}\cdot(e+2[\bar{X}] - \bar{X}) -$$

$$- [\bar{X}]\cdot(e+ [\bar{X}]) = 0$$

Nach der Ersetzung $f = \bar{X} - [\bar{X}]$ wird die Gleichung nach $\bar{\lambda}_j$ aufgelöst und man erhält

$$\bar{\lambda}_j = \frac{1}{\bar{a}_j^2}\left[a_j \,(f-\frac{e}{2}) + \left| \sqrt{\left[\bar{a}_j \,(f-\tfrac{e}{2})\right]^2 + \bar{a}_j^{\,2} \cdot f(e-f)} \right| \right]$$

Diese so errechneten Werte bestimmen die Schnittpunkte der Halbgeraden mit der Kugel.

Die Schnittebene, die durch die von $\bar{\lambda}_j$ errechneten Schnittpunkte läuft, lautet[1]

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}} \frac{1}{\bar{\lambda}_j} \cdot x_j \geqq 1$$

Bei Berücksichtigung der Schlupfvariablen s_i läßt sich der so gewonnene cutting-plane

$$-\sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} \frac{1}{\bar{\lambda}_j} \cdot x_j + s_i = -1$$

oder

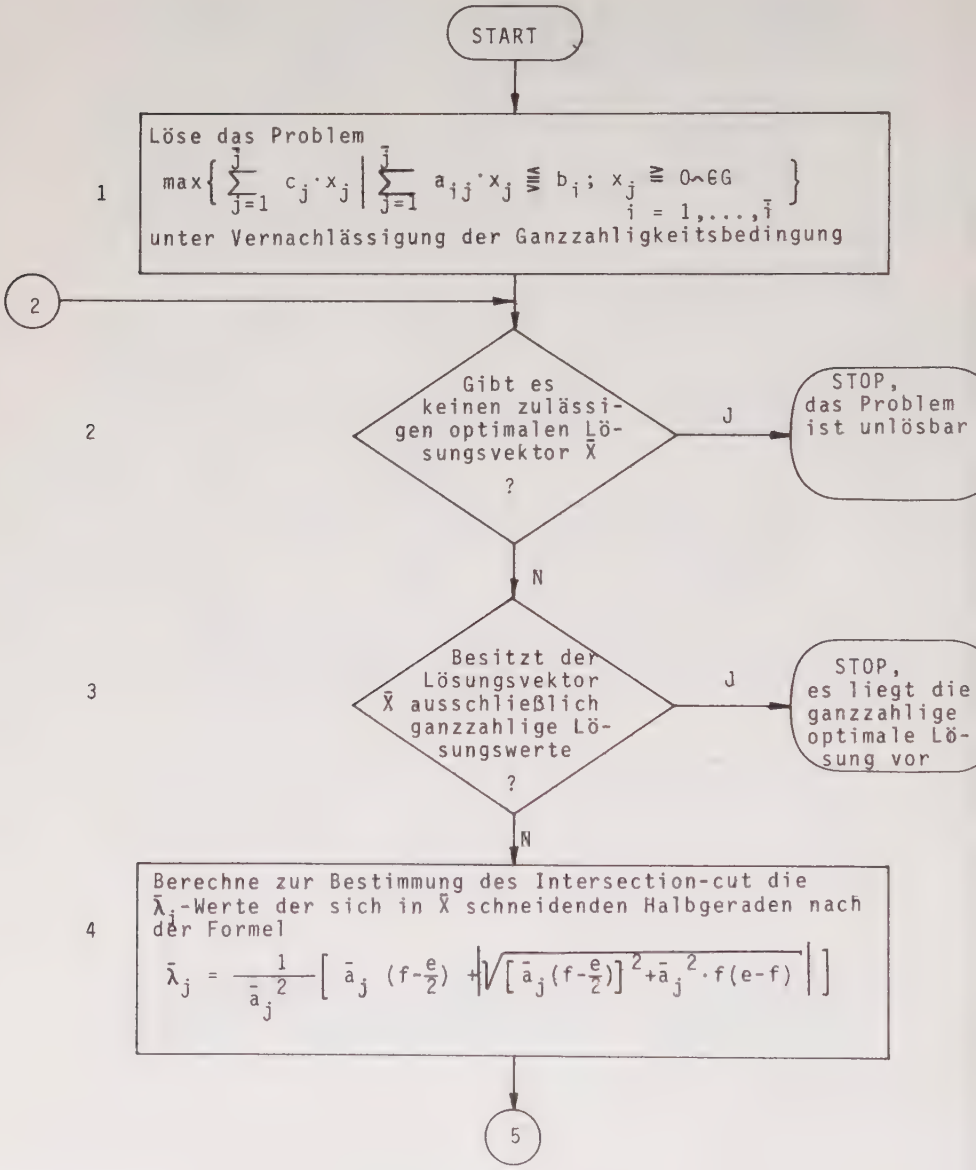
$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} \frac{1}{\bar{\lambda}_j} \cdot x_j - 1 = s_i$$

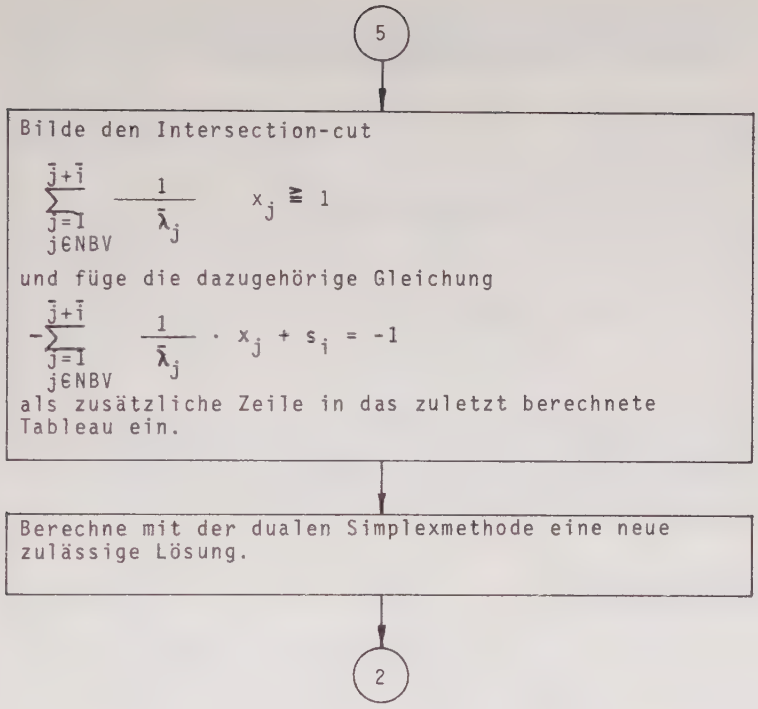
als zusätzliche Zeile dem zuletzt berechneten Tableau hinzufügen.

---

[1] Die mathematische Herleitung der Schnittebene findet man bei BALAS, E.: Intersection Cuts - A New Type of Cutting Planes for Integer Programming, a.a.O., S. 25-27.

Flußdiagramm zum Ablauf des Verfahrens des Intersection-cut




5
Bilde den Intersection-cut
$\sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} \frac{1}{\bar{\lambda}_j} \quad x_j \geq 1$
und füge die dazugehörige Gleichung
$-\sum_{\substack{j=1 \\ j \in NBV}}^{\bar{j}+\bar{i}} \frac{1}{\bar{\lambda}_j} \cdot x_j + s_i = -1$
als zusätzliche Zeile in das zuletzt berechnete Tableau ein.
6
Berechne mit der dualen Simplexmethode eine neue zulässige Lösung.
2

43364 Beispiel und graphische Darstellung

Zu lösen sei

$$\begin{aligned} \max Z = {} & x_1 + x_2 \\ & 5x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 16 \\ & -5x_1 + 20x_2 \leq 74 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \wedge \in G \end{aligned}$$

Die Lösungsvariablen des gemischtzahligen Optimaltableaus, die mit Hilfe der Simplexmethode berechnet wurden, lassen sich durch die Nichtbasisvariablen beschreiben:

$$\begin{matrix} \text{Basis-} \\ \text{variable} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Lösungs-} \\ \text{werte} \end{matrix} \qquad\qquad \text{NBV} \qquad\qquad \text{NBV}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\ 1/5 \\ 3\ 19/20 \\ 4\ 3/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/6 \\ -5/8 \\ 1/24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ -x_3 \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/30 \\ 7/40 \\ 1/24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ -x_5 \\ \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung des ersten Intersection-cut

$$\sum_{j \in \text{NBV}} \frac{1}{\bar{\lambda}_j} \cdot x_j - 1 = s_1 = 0$$

werden die $\bar{\lambda}_j$ - Werte bestimmt:

$$\bar{\lambda}_j = \frac{1}{\bar{a}_j^2}\left[\bar{a}_j \cdot (f-\frac{e}{2}) + \left|\sqrt{\left[\bar{a}_j \cdot (f-\frac{e}{2})\right]^2 + \bar{a}_j^2 \cdot f\,(e-f)}\right|\right]$$

für j = 1

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{\bar{a}_1^2}\left[\bar{a}_1\,(f-\frac{e}{2}) + \left|\sqrt{\left[\bar{a}_1\,(f-\frac{e}{2})\right]^2 + \bar{a}_1^2 \cdot f\,(e-f)}\right|\right]$$

Es erfolgt zunächst die Berechnung der einzelnen Elemente von $\bar{\lambda}_1$.

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} \overline{x_3} \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/24 \end{pmatrix} =$$ Spaltenvektor der Hauptvariablen unter der Nichtbasisvariablen x_3

$$\bar{a}_1^2 = \frac{17}{576} = 0{,}029513$$

$$\frac{1}{\bar{a}_1^2} = \frac{576}{17} = 33{,}882352$$

$$f = \bar{x} - [\bar{x}] = \begin{pmatrix} 4\ 1/5 \\ 4\ 3/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$f - \frac{e}{2} = \begin{pmatrix} -\ 3/10 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\bar{a}_1 \cdot \left(f-\frac{e}{2}\right) = -\frac{19}{480} = -\ 0{,}039583$$

$$\left[\bar{a}_1 \cdot \left(f-\frac{e}{2}\right)\right]^2 = \frac{361}{230400} = 0{,}001566$$

$$f(e-f) = (1/5,\ 3/4)\begin{pmatrix} 4/5 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \frac{139}{400} = 0{,}3475$$

$$\bar{a}_1^2 \cdot f \cdot (e-f) = \frac{2363}{230400} = 0{,}010256$$

$$\bar{\lambda}_1 = 33,882352 \; (-0,039583 + \left| \sqrt{0,001566 + 0,010256} \right|)$$

$$\bar{\lambda}_1 = 2,342829$$

$\underline{j = 2}$

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{1}{\bar{a}_2^{\,2}} \left[\bar{a}_2 \; (f-\tfrac{e}{2}) + \left| \sqrt{\left[\bar{a}_2 \cdot (f-\tfrac{e}{2}) \right]^2 + \bar{a}_2^{\,2} \cdot f(e-f)} \right| \right]$$

$$\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} -1/30 \\ 1/24 \end{pmatrix}$$

$$\bar{a}_2^{\,2} = \frac{1476}{518400} = 0,002847$$

$$\frac{1}{\bar{a}_2^{\,2}} = \frac{518400}{1476} = 351,219512$$

$$\bar{a}_2 \cdot (f-\tfrac{e}{2}) = (-1/30,\; 1/24) \begin{pmatrix} -3/10 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \frac{49}{2400} = 0,020416$$

$$\left[\bar{a}_2 \cdot (f-\tfrac{e}{2}) \right]^2 = \frac{2401}{5760000} = 0,000416$$

$$\bar{a}_2^{\,2} \cdot f \; (e-f) = \frac{1476}{518400} \cdot \frac{139}{400} = \frac{205164}{207360000} = 0,000989$$

$$\bar{\lambda}_2 = 351,219512 \; (0,020416 + \left| \sqrt{0,000416 + 0,002847 \cdot 0,3475} \right|)$$

$$\bar{\lambda}_2 = 20,335259$$

Die Werte von $\bar{\lambda}_1$ und $\bar{\lambda}_2$ werden in die Gleichung des ersten Intersection-cut eingesetzt.

Somit erhält man als Gleichung für den ersten Intersection-cut

$$1 + \frac{1}{2{,}342829}\, x_3 + \frac{1}{20{,}33529}\, x_5 - 1 = s_1 = 0$$

$$1 + 0{,}426834\, x_3 + 0{,}049175\, x_5 - 1 = s_1 = 0$$

$$1 = 0{,}426834\, x_3 + 0{,}049175\, x_5$$

1. Intersection-cut

Unter Hinzuziehung der Restriktionen I und III läßt sich der Intersection-cut durch die Hauptvariablen darstellen.

Der Intersection-cut lautet somit unter Vernachlässigung der Schlupfvariablen[1] s_1:

$$1{,}888295\, x_1 + 2{,}690836\, x_2 = 19{,}712310$$

Diese Restriktion schneidet - wie aus Abb. 12 zu ersehen ist - das gemischtzahlige Optimum ab; unter Beachtung der Schlupfvariablen s_1 wird die Gleichung dem gemischtzahligen Optimaltableau hinzugefügt und mit Hilfe der dualen Simplexmethode berechnet man ein neues Optimaltableau, das als optimale Lösungswerte $\bar{x}_1 = 4{,}878$ und $\bar{x}_2 = 3{,}903$ aufweist.

---

[1] Für den neuen Optimalpunkt gilt die Restriktion als Gleichung, d.h. der neue Optimalvektor muß die Koordinaten der neuen Restriktion erfüllen. Für spätere Optimallösungen gilt für die obige Restriktion das '$\leqq$' Zeichen.

Da der Lösungsvektor dieses Tableaus wiederum nicht ganzzahlig ist, muß ein neuer Intersection-cut in der beschriebenen Form errechnet und dem Tableau als zusätzliche Zeile beigefügt werden. Nach der Optimierung wiederholt sich der Vorgang solange, bis ein ganzzahliger Lösungsvektor gefunden bzw. seine Nichtexistenz nachgewiesen ist.

Auf die Berechnung weiterer Schnitte soll hier verzichtet werden. Die Restriktivität der einzelnen Intersection-cuts kann aus den folgenden graphischen Darstellungen entnommen werden.

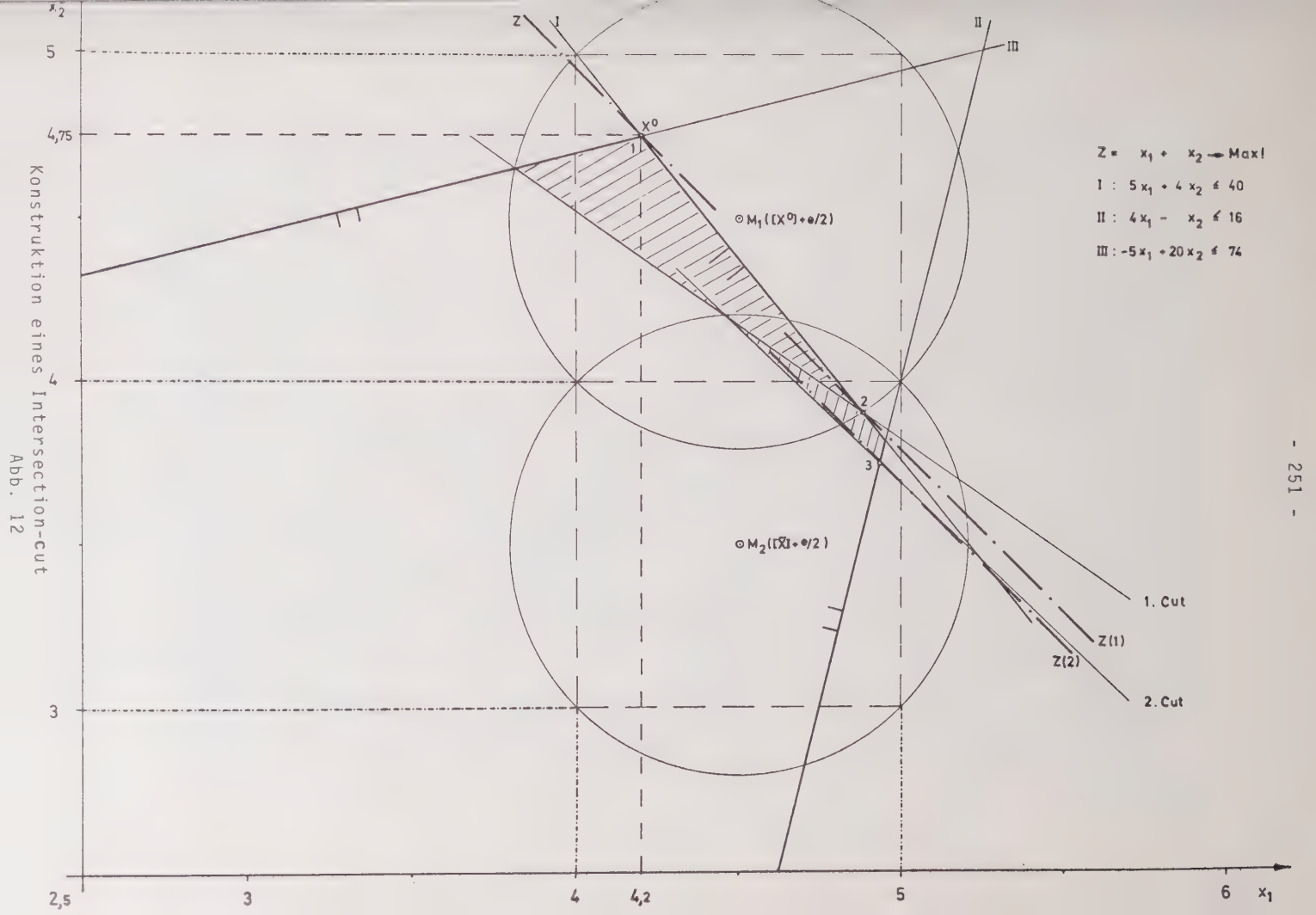
Die Kreise mit den zugehörigen Nummern bezeichnen das jeweilige Optimum, das durch Hinzufügen weiterer Intersection-cuts, die laufend durchnumeriert werden, erhalten wurde. Der Kreis Nummer Eins zeigt das ursprüngliche gemischtzahlige Optimum an.

Wie aus der Abb. 13 zu erkennen ist, sind zur Fixierung des ganzzahligen Optimums ($Z_{opt} = 8$, $x_{1_1} = 4$, $x_2 = 4$) eine Vielzahl von Schnittebenen notwendig[1].

Die Abb. 12 zeigt die Konstruktion der ersten beiden cutting planes.
Der gesamte Lösungsweg wird graphisch durch die folgende Abb. 13 veranschaulicht.

---

[1] Der Fractional Integer Programming Algorithm löst z.B. das obige Problem durch die Konstruktion von lediglich zwei zusätzlichen Restriktionen.



Konstruktion eines Intersection-cut
Abb. 12

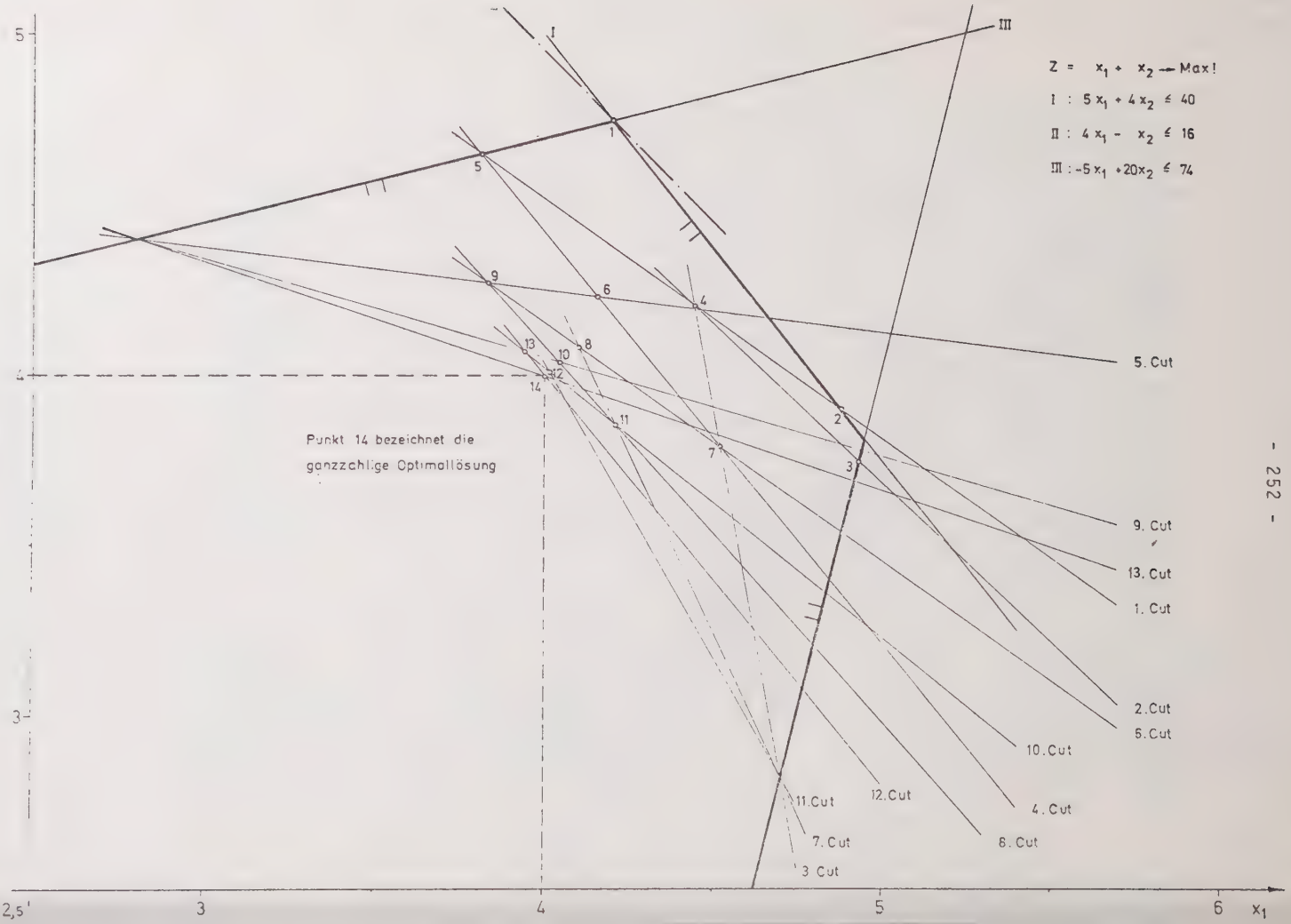

Z = x1 + x2 → Max!
I : 5 x1 + 4 x2 ≤ 40
II : 4 x1 − x2 ≤ 16
III : −5 x1 + 20 x2 ≤ 74
I
III
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
5. Cut
9. Cut
13. Cut
1. Cut
2. Cut
6. Cut
10. Cut
4. Cut
8. Cut
12. Cut
11. Cut
7. Cut
3 Cut
Punkt 14 bezeichnet die
ganzzahlige Optimallösung
5
3
2,5
3
4
5
6
x1

Abb. 13

43365 Beurteilung des Intersection-cut-Verfahrens

Durch die Verwendung konvexer Körper[1] bei der Konstruktion von Schnitthyperebenen können in einigen Fällen zunächst recht tiefe Schnitte erzeugt werden.

Das durchgerechnete Beispiel zeigte jedoch, daß die späteren Schnittrestriktionen nur noch verhältnismäßig kleine Teile des Beschränkungsfeldes eliminieren und dadurch nur in kleinen Schritten das ganzzahlige Optimum angestrebt wird, so daß die Anzahl der Schnitte für das kleine Problem recht erheblich war. Der Rechenaufwand für jeden Schnitt ist dabei nicht geringer als bei den übrigen Schnittebenenverfahren.

Der Ablauf des Verfahrens entspricht dem des Fractional Integer Programming Algorithm, so daß die dortigen Ausführungen über Rundungsfehler und Rechenaufwand hier entsprechend gelten.
Durch die komplizierte Berechnung der Schnittpunkte der Kugel mit den restriktiv wirkenden Halbgeraden in Form der $\bar{\lambda}_j$ Werte, die bei jedem Iterationsvorgang neu zu ermitteln sind, wird beim Einsatz von EDV-Anlagen die Formulierung eines Unterprogramms notwendig und damit zusätzlicher Rechen- und Speicheraufwand erforderlich.

Trotz interessanter theoretischer Aspekte sollte das Verfahren des Intersection-cut zur Lösung ökonomischer Ganzzahligkeitsprobleme erst dann herangezogen werden, wenn die Anzahl der Schnitte zur Auffindung des ganzzahligen Optimums noch reduziert werden kann.

---

[1] Außer den erwähnten Schnittfiguren können zur Erzeugung der Schnitthyperebenen beliebig andere konvexe Körper ausgewählt werden, soweit garantiert ist, daß keine ganzzahligen zulässigen Lösungspunkte im Inneren der konvexen Körper liegen.

Da bisher keine ausreichend guten Testergebnisse bekannt sind, kann die derzeitige Skepsis in bezug auf die Anwendung des Verfahrens in der beschriebenen Form nicht beseitigt werden.

4337 Vergleich der Schnittebenenverfahren

Die behandelten Schnittebenenverfahren verwenden zur Erzeugung ganzzahliger Lösungsvektoren schneidende Hyperebenen.
Durch die Berücksichtigung künstlicher Restriktionen werden nichtganzzahlige Teile des ursprünglichen Beschränkungsfeldes abgeschnitten.
Um das Verfahren möglichst effektiv zu gestalten, sind tiefe Schnitte zu konstruieren, die den Iterationsprozeß und damit auch den Rechenaufwand reduzieren sollen.

Sieht man von einigen Verfahren ab, die sich für die Anwendung auf ökonomische Ganzzahligkeitsprobleme durch mangelnde Konvergenzgeschwindigkeit von vornherein nicht eignen, so kann über eine generelle Vorteilhaftigkeit eines Verfahrens keine Aussage gemacht werden, da die Anwendung von der Problemformulierung wesentlich beeinflußt wird. Dabei ist von Bedeutung, ob das Problem in einer primal zulässigen oder dual zulässigen Form vorliegt, da primal zulässige Probleme von vornherein die Ermittlung eines ganzzahligen Optimums -falls ein derartiges existiert - garantieren, während dual zulässige aber primal unzulässige Problemformulierungen nicht unbedingt die Existenz einer primal zulässigen

Lösung erwarten lassen können[1].

Die Konstruktion zusätzlicher Schnitte erfordert bei jedem Schnitt jeweils die Vergrößerung des Tableaus um eine Zeile und eine Spalte, die jedoch in den meisten Fällen späterhin wieder gestrichen werden.

Bei der Notwendigkeit der Konstruktion vieler Schnitte kann das Problem dennoch einen sehr großen Umfang annehmen und damit viel Speicherplatz der EDV-Anlage beanspruchen. Die Verwendung externer Speicher, die die Rechenzeit negativ beeinflußt, bleibt dabei im allgemeinen unumgänglich.
Abgesehen von dem Nichtvorhandensein universeller Rechenregeln zur Verkleinerung des Lösungsbereiches ohne gleichzeitige Eliminierung zulässiger ganzzahliger Lösungspunkte muß der größte Nachteil der Schnitthyperebenenverfahren in der fehlenden Berechnungsmöglichkeit von ganzzahligen Suboptima gesehen werden[2], deren Kenntnis gerade bei großen Problemen wegen der hohen Inanspruchnahme von Rechnerkapazitäten wertvolle Informationen liefern kann. Schon allein aus diesem Grunde wird die Anwendung von Schnitthyperebenenverfahren zur Optimierung größerer Investitions- und Finanzierungsprogramme als ungeeignet angesehen.

---

[1] Eine nähere Untersuchung der Ganzzahligkeitsalgorithmen und deren vorteilhafte Anwendung auf unterschiedliche Problemformulierungen findet man bei LINDNER, L.: Grundlagen und Bedeutung von Algorithmen zur ganzzahligen linearen Programmierung, a.a.O., S. 69 ff. Vgl. auch KORBUT, A.A., FINKELSTEIN, J.J.: Diskrete Optimierung, a.a.O., S. 147 ff. Die Zusammenstellung von Ergebnissen durchgeführter Rechenexperimente vgl. bei BALINSKI,M.L.: Integer Programming. Methods, Uses, Computation, a.a.O., S. 253-313.

[2] Diese Aussage gilt nicht für den primalen All-integer Integer Algorithmus in Kapitel 4335.

Die theoretische Darstellung ausgewählter Schnitthyperebenenverfahren ergab, daß diese Verfahren im allgemeinen mathematisch exakte Algorithmen verwenden.

Die Anwendbarkeit der Verfahren auf praktische ökonomische Probleme - wie z.B. bei Modellen mit lediglich 18 Variablen und 2o Restriktionen - erweist sich in vielen Fällen als problematisch, so daß auch in der Literatur selten größere ökonomische Beispiele gelöst werden.

Eine Anwendungsmöglichkeit der Verfahren ist für den Wirtschaftswissenschaftler von vordringlicher Bedeutung. Daher genügt es nicht, einen mathematisch sinnvollen Algorithmus zur Kenntnis zu nehmen, sondern es bleibt die Aufgabe, die einzelnen Verfahren zu analysieren, um somit zu Aussagen über die Anwendbarkeit auf ökonomische Probleme - wie z.B. simultan zu ermittelnde Investitions- und Finanzierungsprogramme - zu gelangen.

44 Anwendung des modifizierten Verfahrens von DAKIN zur simultanen Lösung eines ganzzahligen Investitions- und Finanzierungsproblems

Die in der betrieblichen Realität geforderte Ganzzahligkeit der Variablenwerte führt zu einer entsprechenden Erweiterung des in Kapitel 33 formulierten finanzwirtschaftlichen Investitionsmodells durch die Berücksichtigung der zusätzlichen Restriktionen

$$x_{j\tau}\ ,\ y_{f\tau},\ k_{\tau} \in G \quad (j = 1,\ldots,\bar{j},\ f = 1,\ldots,\bar{f},\ \tau = 1,\ldots,T-1)$$

Die Modellelemente und Daten des bereits berechneten kontinuierlichen Investitions- und Finanzierungsproblems können aus der folgenden Übersicht noch einmal ersehen werden.

		Entscheidungszeitpunkt τ								
		1			2			3		
t	Zahlungen	Investitionsvariable $x_{jτ}$								
		x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{12}	x_{32}	x_{42}	x_{23}	x_{43}	
1		10.000	40.000	80.000						
2		- 8.000	-3.000	-70.000	10.000	80.000	60.000			
3		- 3.000	-5.000	-30.000	-8.000	-70.000	-45.000	80.000	65.000	
4	(Zielfunktionskoeffizienten)(-1)	- 3.000	-35.000	-10.000	-4.000	-35.000	-20.000	-90.000	-66.000	
	max. Aktivitätsniveau d. Investitionsvariabler	5	4	7	4	3	4	4	3	
t	Zahlungen	Finanzierungsvariable $y_{fτ}$								
		y_{11}	y_{21}	y_{31}	y_{22}	y_{32}		y_{13}	y_{33}	
1		- 1,000	-(1-0,050)	-1,000						
2		0,580	0,090	1,100	-(1-0,050)	-1,000				
3		0,540	0,090		0,090	1,100		- 1,000	- 1,000	
4	(Zielfunktionskoeffizienten)(-1)	0	1,090	0	1,090	0		1,080	1,100	
t	Zahlungen	Finanzanlagevariable $k_τ$							D_t	L_1
		k_1			k_2			k_3		
1		1,000							-10.100	30.200
2		- 1,050			1,000				-10.100	
3					- 1,050			1,000	-10.100	
4	(Zielfunktionskoeffizienten)(-1)	0			0			- 1,050	-10.100	

Die maximalen Finanzierungsniveaus Y_{ft} der einzelnen Perioden betragen: Y_{11} = 149.500, Y_{21} = 120.000, Y_{31} = 120.000, Y_{12} = 149.500, Y_{22} = 105.000, Y_{32} = 69.700, Y_{13} = 149.500, Y_{23} = 90.000, Y_{33} = 50.000.

Zur Lösung des durch die Ganzzahligkeitsbedingung erweiterten Beispiels auf einer EDV-Anlage mit einer zu beanspruchenden Kernspeicherkapazität von maximal 64 K Worte empfahl sich aufgrund der vorangegangenen Untersuchungsergebnisse das DAKIN- bzw. das beschriebene modifizierte DAKIN-Verfahren[1,2].
Werden sowohl für die Investitions- als auch für die Finanzierungs- und Finanzanlagevariablen[3] Ganzzahligkeitsforderungen unterstellt, erhält man ein All-Integer Programm, das nachfolgende optimale Lösungswerte der Basisvariablen aufweist:

x_{11} = 4 Einheiten
x_{31} = 4 "
x_{32} = 2 "
x_{23} = 3 "
y_{11} = 149.5oo Geldeinheiten
y_{21} = 88.525 "
y_{31} = 1o6.3o1 "
y_{22} = 9 "
y_{32} = 69.7oo "
y_{13} = 143.468 "
y_{33} = k_1 = 0
Z_{opt} = 14o.552,273 Geldeinheiten[4].

Dieses optimale Programm ergibt folgenden Investitions- und Finanzplan:

---

[1] Das Beispiel wurde auf einer UNIVAC 11o8 der Gesellschaft für wissenschaftliche Datenverarbeitung, Göttingen, durchgerechnet. Das für dieses Beispiel in FORTRAN programmierte Verfahren benutzt außer den bereits erwähnten Unterprogrammen aus der IBM Scientific Subroutine das Unterprogramm GMPRD für Matrizenmultiplikationen Für Programmierhilfen sei Herrn Dipl.-Kfm. D. Bergmann gedankt.

[2] Die Schnitthyperebenenverfahren müssen bisher lediglich als theoretisches Konzept angesehen werden, so daß ihre Anwendung auf größere ökonomische Ganzzahligkeitsprobleme aus den erwähnten Gründen auch selten zu finden ist. Vgl. auch KORTE, B.: Ganzzahlige Programmierung - Ein Überblick, a.a.O., S. 89 f.

[3] Die Ganzzahligkeitsforderung der Finanzierungs- und Finanzanlagevariablen hängt - wie früher erwähnt - von den Finanzierungs- und Kapitalanlagemöglichkeiten des Unternehmens ab und muß als Sonderfall angesehen werden.

[4] Werden in der letzten Periode noch Entnahmen in Höhe von D_4 = 1o.1oo Geldeinheiten vorgenommen, so ist dieser Betrag von dem optimalen Zielwert abzuziehen, so daß in diesem Falle das Endvermögen 13o.452,273 Geldeinheiten betragen würde. Eine entsprechende Betrachtung gilt auch für das folgende Mixed Integer Problem.

Investitions- und Finanzplan für die Periode 1-3

(All Integer Problem)

Ermittlung des KAPITALBEDARFS						
Maßnahme	x_{11}	x_{31}	D_1			P
Aktivit.Niveau	4	4				E
Betrag	4oooo	32oooo	1o1oo			R
KAPITALBEDARF	37o1oo,oo					I
Strategie der KAPITALDECKUNG						O
Maßnahme	y_{11}	y_{21}	y_{31}	L_1		D
Aktivit.Niveau	149soo	88525	1o63o1			E
Betrag	149soo	84o98,75	1o63o1	3o2oo		1
KAPITALDECKUNG	37oo99,75[1]					
Ermittlung des KAPITALBEDARFS						
Maßnahme	x_{32}	y_{11}	y_{21}	y_{31}	D_2	P
Aktivit.Niveau	2	149soo	88525	1o63o1		E
Betrag	16oooo	8671o	7967,25	116931,1o	1o1oo	R
KAPITALBEDARF	3817o8,35					I
Strategie der KAPITALDECKUNG						O
Maßnahme	x_{11}	x_{31}	y_{22}	y_{32}		D
Aktivit.Niveau	4	4	9	697oo		E
Betrag	32ooo	28oooo	8,55	697oo		2
KAPITALDECKUNG	3817o8,55					
Ermittlung des KAPITALBEDARFS						
Maßnahme	x_{23}	y_{11}	y_{21}	y_{22}	y_{32}	D_3	P
Aktivit.Niveau	3	149soo	88525	9	697oo		E
Betrag	24oooo	8o73o	7967,25	o,81	7667o	1o1oo	R
KAPITALBEDARF	415468,o6						I
Strategie der KAPITALDECKUNG							O
Maßnahme	x_{11}	x_{31}	x_{32}	y_{13}			D
Aktivit.Niveau	4	4	2	143468			E
Betrag	12ooo	12oooo	14oooo	143468			3
KAPITALDECKUNG	415468,oo						

[1] Etwaige Differenzen zwischen Kapitalbedarf und Kapitaldeckung ergeben sich durch Rundungsfehler. In der Periode 1 entsteht die Abweichung von o,25 Geldeinheiten dadurch, daß der Wert x_{11} = 3,999975oo als ganzzahlig (x_{11} = 4) angesehen wird.

Wird davon ausgegangen, daß die Finanzierungs- und Finanzanlagemöglichkeiten der Unternehmung nicht der Ganzzahligkeitsforderung unterliegen müssen, gelangt man zu einem Mixed Integer Problem, das folgende optimale Investitions- und Finanzierungsprogramme erstellt:

x_{11}	=	4 Einheiten
x_{31}	=	4 "
x_{12}	=	0 "
x_{32}	=	2 "
x_{23}	=	3 "
y_{11}	=	149.5oo Geldeinheiten
y_{21}	=	88.534,o31 "
y_{31}	=	1o6.292,67o "
y_{32}	=	69.7oo,ooo "
y_{13}	=	143.468,o63 "
Z_{opt}	=	14o.552,398 "

Aus dem folgenden Investitions- und Finanzplan ist der Kapitalbedarf und die Strategie der Kapitaldekkung in den einzelnen Planungsperioden zu ersehen.

Investitions- und Finanzplan für die Perioden 1-3

(Mixed Integer Problem)

Ermittlung des KAPITALBEDARFS						PERIODE 1
Maßnahme		x_{11}		x_{31}	D_1	
Aktivit.Niveau		4		4		
Betrag		40000		320000	1o100	
KAPITALBEDARF			37o100			
Strategie der KAPITALDECKUNG						
Maßnahme	y_{11}	y_{21}		y_{31}	L_1	
Aktivit.Niveau	149500	88534,o314		1o6292,67o		
Betrag	149500	841o7,3298		1o6292,67o	3o200	
KAPITALDECKUNG			37oo99,9998			
Ermittlung des KAPITALBEDARFS						PERIODE 2
Maßnahme	x_{32}	y_{11}	y_{21}	y_{31}	D_2	
Aktivit.Niveau	2	149500	88534,o314	1o6292,67o		
Betrag	160000	8671o	7968,o628	116921,937	1o100	
KAPITALBEDARF			381699,9998			
Strategie der KAPITALDECKUNG						
Maßnahme		x_{11}	x_{31}	y_{32}		
Aktivit.Niveau		4	4	69700		
Betrag		32000	280000	69700		
KAPITALDECKUNG			381700			
Ermittlung des KAPITALBEDARFS						PERIODE 3
Maßnahme	x_{23}	y_{11}	y_{21}	y_{32}	D_3	
Aktivit.Niveau	3	149500	88534,o314	69700		
Betrag	240000	8o73o	7968,o628	7667o	1o100	
KAPITALBEDARF			415468,o628			
Strategie der KAPITALDECKUNG						
Maßnahme	x_{11}	x_{31}	x_{32}	y_{13}		
Aktivit.Niveau	4	4	2	143468,63		
Betrag	12000	120000	140000	143468,63		
KAPITALDECKUNG			415468,6300			

Beim Vergleich der simultan berechneten optimalen Investitions- und Finanzierungsprogramme des Mixed Integer und All Integer Problems ergeben sich in beiden Fällen degenerierte Lösungen, da Lösungsvariable mit dem Wert Null in der Basis vorhanden sind.

Das optimale Investitionsprogramm ist stabil, d.h. die Programme des All Integer und Mixed Integer Problems gleichen sich sowohl qualitativ als auch quantitativ.

In der Planungsperiode 1 werden vier Einheiten der Maschine 1 und vier Einheiten der Maschine 3 eingesetzt. Hinzu kommen in der 2. Periode zwei Einheiten des Investitionsobjektes 3 und in der 3. Periode drei Einheiten des Investitionsobjektes 2.

Die qualitative Zusammensetzung des optimalen Finanzierungs- und Finanzanlageprogramms des All Integer Problems gleicht dem Programm des Mixed Integer Problems bis auf die Finanzierungsaktivität y_{22}, die im All Integer Programm mit neun Einheiten in Anspruch genommen, während im Mixed Integer Problem auf eine Verwendung verzichtet wird.

Ein unbedeutender Unterschied ergibt sich zwangsläufig in der quantitativen Zusammensetzung der Finanzierungsprogramme.

Wegen der relativ geringen Abweichungen der optimalen Variablen- und der entsprechenden Zielfunktionswerte, die sich lediglich in der Stelle nach dem Komma unterscheiden, wird es aus Kostenergägungen sinnvoll sein, auf die Berechnung eines All Integer Programms zu verzichten und

unter Berücksichtigung der unbedingt erforderlichen Ganzzahligkeit der Investitionsvariablen lediglich ein Mixed Integer Programm zu formulieren und zu lösen.

Dies gilt vor allem dann, wenn das Problem bei einer großen Anzahl von Finanzierungsalternativen durch die Ganzzahligkeitsforderung der Finanzierungsvariablen derart komplex wird, daß der zur Lösung notwendige Rechenaufwand das wirtschaftlich vertretbare Maß übersteigt[1].

In diesen Fällen bewirkt eine die exakte Berechnung ersetzende Rundung[2] der Werte der Finanzierungsvariablen eine Substitution der Genauigkeit durch Kostenersparnis aufgrund geringerer Rechenzeiten, wobei jedoch die gerundeten Werte auch die Zulässigkeit des Problems gewährleisten müssen.

Die Rechenergebnisse der Beispiele unterstreichen die Aussage, daß sowohl aus ökonomischen als auch aus rechentechnischen Erwägungen bei der simultanen Investitions- und Finanzplanung lediglich die Formulierung und Lösung von Mixed Integer Problemen sinnvoll ist.
Die ökonomische Relevanz des gemischt ganzzahligen Problems leitet sich aus den annähernd identischen optimalen Investitions- und Finanzierungsprogrammen beider Integer Probleme ab, deren Zielwerte - wie erwähnt - erst in der Stelle nach dem Koma differieren.

Durch die unwesentlichen Abweichungen der berechneten Programme kann auf die Ermittlung von ganzzahligen Lösungswerten der Finanzierungsvariablen verzichtet

---

[1] Wegen der in der Regel verhältnismäßig hohen Finanzbeträge bewirkt die Ganzzahligkeitsbedingung für diese Variablen ein überproportionales Anwachsen des Rechenaufwandes.

[2] Eine Rundung der Werte der Finanzierungsvariablen kann sich jedoch nur bei sehr hohen Finanzierungsbeträgen empfehlen, da lediglich in diesen Fällen die Auswirkungen auf das optimale Programm unbedeutend sind.

werden. Betrachtet man den zur Lösung notwendigen Rechenaufwand, wird diese Aussage noch erhärtet. Während das Programm mit ausschließlich ganzzahligen Lösungswerten der Investitionsvariablen zur Optimierung weniger als zwei Minuten beanspruchte, wurde für das All Integer Problem weit mehr als eine Stunde Rechenzeit benötigt.

Die Expansion des Rechenaufwandes erklärt sich vor allem aus der Ganzzahligkeitsforderung für die Finanzierungsvariablen, die verhältnismäßig große Werte annehmen und somit den Verzweigungsprozeß erheblich verlängern.

Wegen der im Vergleich zu den Investitionsaktivitäten niedrigen Zielfunktionskoeffizienten der Finanzierungsvariablen werden durch das Verzweigungskriterium zwar viele Bounds mit relativ hohen Zielwerten berechnet, jedoch erfolgt das Auffinden eines ganzzahligen Knotens erst sehr spät, so daß das Verfahren bei dieser extremen Problemstruktur einen tief verzweigten Baum aufbaut. Die progressive Zunahme des Rechenaufwandes wird noch erheblich durch die formulierten Gleichheitsrestriktionen gefördert, die die ganzzahligen zulässigen Gitterpunkte des Restriktionsfeldes in starkem Maße reduzieren und damit das Auffinden ganzzahliger Lösungspunkte erschweren. Da - wie beschrieben - aus ökonomischen Gründen auf ganzzahlige Finanzierungsaktivitäten im allgemeinen verzichtet werden kann, wird zur Ermittlung eines optimalen ganzzahligen Investitionsprogramms ein über das wirtschaftlich vertretbare Maß hinausgehender Rechenaufwand vermieden; für die Optimierung des Mixed Integer eignet sich dabei besonders das modifizierte DAKIN-Verfahren.

Zeigten die beiden Integer Programme nur geringe Abweichungen, so können bei einem Vergleich der optimalen ganzzahligen Investitions- und Finanzierungsprogramme[1] mit dem kontinuierlichen Problem gravierende Unterschiede in der Zusammensetzung der optimalen Programme festgestellt werden.

Während bei Vernachlässigung der Ganzzahligkeitsbedingungen lediglich die Investitionsvariablen x_{31}, x_{32} und x_{23} Elemente des optimalen Investitionsprogramms waren, wird bei den Integerproblemen außer den obigen Variablen noch zusätzlich das Investitionsobjekt x_{11} beansprucht, so daß die qualitative wie auch quantitative Zusammensetzung der Investitionsprogramme differiert.

Ähnliche Unterschiede lassen sich für das optimale Finanzierungsprogramm aufzeigen, die besonders bei der Verwendung der Variablen y_{33} verdeutlicht werden können.

Wird im kontinuierlichen Problem die angesprochene Finanzierungsaktivität durch die größere Inanspruchnahme der Investitionsvariablen x_{23} (= 3,81799609) im Gegensatz zum Integerwert x_{23} (= 3) in voller Höhe eingesetzt, kann im ganzzahligen optimalen Programm auf die Verwendung völlig verzichtet werden. Das heißt, daß in diesem Fall eine Finanzierung über die Finanzierungsmaßnahme y_{33} entfällt.

Erreicht man z.B. durch Rundung der optimalen gemischtzahligen Lösungswerte der Investitionsvariablen auf die nächstkleinere ganze Zahl eine ganzzahlige Lösung, ergibt sich ein Zielwert von 130.413,351 Geldeinheiten. Der optimale Zielwert des Mixed Integer Problems beträgt

---

[1] Eine Finanzanlage wird in keinem der untersuchten Fälle vorgenommen, so daß auf die Diskussion dieser Variablen verzichtet wird.

hingegen 14o.552,399 Geldeinheiten, so daß durch die Rundung eine Gewinndifferenz von 1o.139,o48 Geldeinheiten zugunsten der exakten Berechnung zu verzeichnen ist, auf die der Betrieb im Falle der Rundung von gemischtzahligen Lösungswerten verzichten müßte.

5 Zusammenfassung

Eine betriebliche Investitionsplanung, die wegen der in der Realität gegebenen Komplexität in einem quantitativ formulierten Investitionsmodell vollzogen und mit Hilfe der Methoden der Unternehmensforschung optimiert werden soll, erweitert die Betrachtungen der traditionellen Investitionsrechnungen.

Diese Erweiterung dokumentiert sich in der Berücksichtigung der betrieblichen Zusammenhänge wesentlicher Planungsbereiche und derer Variablen, so daß die Lösung eines derartigen betrieblichen Planungsproblems und die Berechnung der einzelnen optimalen Programme der betreffenden Betriebsbereiche nur durch eine simultane Bestimmung der Aktionsparameter erfolgen kann.

Zur Vorbereitung finanzwirtschaftlich orientierter Investitionsentscheidungen sind die Strukturen und Abhängigkeiten der betrieblichen Bereiche untersucht worden, die durch die Investitionsentscheidungen vorwiegend berührt werden. Hierbei drängten sich die Erfassung der Interdependenzen des betrieblichen Investitions- und Finanzierungsbereichs auf. Die Abhängigkeiten der Variablen der angesprochenen Planungsbereiche wurden in den Nebenbedingungen eines finanzwirtschaftlichen Investitionsmodells erfaßt.

Die unterstellte Endwertmaximierung als Zielfunktion des Modells entspricht einer langfristigen Gewinnmaximierung und kann dem Charakter der Langfristigkeit einer Investitionsplanung in hohem Maße gerecht werden.

Im Gegensatz zu den Kapitalwertmodellen kann das Modell der Endwertmaximierung auf die Fixierung des Kalkulationszinsfußes, mit dem in verschiedenen anderen Modellen die durch die Variablen verursachten Zahlungsströme abgezinst werden, weitgehend verzichten.

Die Besonderheit der finanzwirtschaftlichen Investitionsmodelle liegt - im Vergleich zu einigen anderen ökonomischen Modellen - in der Beachtung von Ganzzahligkeitsbedingungen für die Modellvariablen.

Während die Ganzzahligkeitsforderung für die Investitionsvariablen unumstritten ist, richtet sich die Ganzzahligkeitsbedingung für die Finanzierungs- und Finanzanlagevariablen nach den individuellen Finanzierungs- und Kapitalanlagemöglichkeiten der Unternehmung.

Die Untersuchungen haben gezeigt, daß die Vernachlässigung der von der betrieblichen Realität geforderten Ganzzahligkeitsbedingung und die daraus resultierende Rundung der gemischtzahligen Lösungswerte zu einem Investitions- und Finanzierungsprogramm führen kann, das in Hinblick auf die Zielfunktion nicht optimal ist und somit schwere betriebliche Fehlentscheidungen nach sich zieht.

Durch die Beachtung von Ganzzahligkeitsbedingungen in finanzwirtschaftlichen Investitionsmodellen ändert sich in der Regel das Lösungsverfahren, so daß es nicht genügt, dem Modell lediglich die entsprechenden Ganzzahligkeitsbedingungen hinzuzufügen; vielmehr ist eine Untersuchung der zur Lösung in Frage kommenden Ganzzahligkeitsalgorithmen notwendig.

Diese Forderung wird um so dringlicher, wenn man bedenkt, daß die einzelnen Verfahren in ihrem Rechenaufwand stark differieren. Durch die Komplexität der ökonomischen Investitionsprobleme kann die Lösung bei alternativer Anwendung der einzelnen Lösungsverfahren zu beachtlichen Kostenabweichungen führen, die durch unterschiedliche Inanspruchnahme einer EDV-Anlage entstehen.

Der erhebliche Rechenaufwand der bisher bekannten Ganzzahligkeitsalgorithmen, der sich in der großen Speicherintensität und den auch damit verbundenen Rechenzeiten ausdrückt, erfordert daher die Untersuchung adäquater Ganzzahligkeitsverfahren zur Anwendung auf finanzwirtschaftliche Investitionsmodelle.

Eine Anwendung der untersuchten Schnitthyperebenenverfahren auf die beschriebenen Investitionsmodelle erscheint unter diesem Gesichtspunkt weniger empfehlenswert; darüber hinaus lassen derartige Verfahren - bis auf eine Ausnahme - die Berechnung ganzzahliger Suboptima nicht zu, obwohl diese Lösungen gerade für größer dimensionierte Probleme wertvolle Informationen bei vertretbarem Rechenaufwand liefern können.

Von den ausgewählten Verzweigungsverfahren erhält man mit dem modifizierten DAKIN-Verfahren bei Berücksichtigung gezielter Auswahlregeln, die sich an der durch die Verzweigung hervorgerufene Zielwertänderung orientierten, für Modelle mittlerer Größenordnung recht befriedigende Ergebnisse, so daß dieses Verfahren programmiert und zur Lösung des finanzwirtschaftlichen Investitionsproblems herangezogen wurde. Dabei zeigte sich jedoch, daß aus ökonomischen wie auch aus rechentechnischen Erwägungen lediglich die Berechnung eines Mixed Integer Problems sinnvoll ist.

Sobald die Modelle aber eine gewisse Größendimension überschreiten, findet die Anwendung des Verfahrens zur Berechnung eines ganzzahligen Optimums aus wirtschaftlichen Gründen ihre Grenze, so daß man sich mit einer zulässigen suboptimalen Lösung, die auch durch das Verfahren berechnet werden kann, zufriedengeben muß.

Da in realitätsbezogenen finanzwirtschaftlichen Investitionsmodellen meist nur eine übersehbare Anzahl von Investitionsvariablen der Ganzzahligkeitsforderung unterliegt, lassen sich viele Investitionsprobleme mit Hilfe des beschriebenen Verzweigungsverfahrens optimieren.

LITERATURVERZEICHNIS

Agin, N.: Optimum Seeking with Branch and Bound. In: Management Science. Vol.13 (1966), Series B, S. 176-185.

Ahlsdorff, M.: Probleme des innerbetrieblichen Transportes in betriebstheoretischer Sicht. Diss. Göttingen 1965.

Albach, H.: Investition und Liquidität. Die Planung des optimalen Investitionsbudgets. Wiesbaden 1962.

Albach, H.: Lineare Programmierung als Hilfsmittel betrieblicher Investitionsplanung. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung. Jg. 12 (1960), S. 526-549.

Albach, H.: Wirtschaftlichkeitsrechnung bei unsicheren Erwartungen. Köln und Opladen 1959.

Angermann, A.: Industrielle Planungsrechnung, Bd. 1, Entscheidungsmodelle. Frankfurt 1963.

Angermann, A.: Linear Programming. In: Handwörterbuch der Sozialwissenschaften. Bd. VI. Stuttgart u.a.O. 1959, S. 611-619.

Antoine, H.: Kennzahlen, Richtzahlen, Planungszahlen. 2. Aufl., Wiesbaden 1958.

Balas, E.: An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables. In: Operations Research, Vol. 13 (1965) S. 517-546.

Balas, E.: Intersection Cuts-A New Type of Cutting Planes for Integer Programming. In: Operations Research, Vol. 19 (1971), S. 19-39.

Balas, E.: The Intersection Cut. - A New Cutting Plane for Integer Programming. Management Science Research Report no. 187. Carnegie-Mellon University, Okt. 1969.

Balas, E.: Integer Programming and Convex Analysis: Intersection Cuts for Outer Polars. In: Mathematical Programming, Vol. 2 (1972), S. 330-382.

Balas, E.; Bowman, V.J.; Glover, F.; Sommer, D.: An Intersection Cut from the Dual of the Unit Hypercube. In: Operations Research, Vol. 19 (1971), S. 40-44.

Balinski, M. L.: Integer Programming: Methods, Uses, Computation. In: Management Science, Vol. 12 (1966), Serie A, S. 253-313.

Balinski, M. L.: Some General Methods in Integer Programming. In: Nonlinear Programming. Hrsg. v. J. Abadie. Amsterdam 1967, S. 221-247.

Ballmann, W.: Beitrag zur Klärung des betriebswirtschaftlichen Investitionsbegriffs und zur Entwicklung einer Investitionspolitik der Unternehmung. Diss. Mannheim 1954.

Bauer, F. L.: Genauigkeitsfragen bei der Lösung linearer Gleichungssysteme. In: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Jg. 46 (1966), S.409-421.

Baugh, H.C.R., Ibaraki, T., Muroga, S.: Results in Using Gomory's All-integer Integer Algorithm to Design Optimum Logic Networks. In: Operations Research, Vol. 19 (1971), S.1090-1096.

Baumol, W.J.; Quandt, R.E.: Investment and Discount Rates under Capital Rationing. A Programming Approach. In: The Economic Journal, Vol.75 (1965), S.317-329.

Beale, E.M.L.: Survey of Integer Programming. In: Operational Research Quarterly, Vol. 16 (1965), S. 219-228.

Beckmann, L.: Art. Finanzierung. In: Handwörterbuch der Betriebswirtschaft. Hrsg.v. H. Seischab und K. Schwantag. Bd. 2, 3. neu bearb. Aufl. Stuttgart 1958, Spalte 1830-1834.

Beckmann, M. J.: Lineare Planungsrechnung. Würzburg 1959.

Bellmann, R.: Dynamic Programming. Princeton 1957.

Ben-Israel, A.; Charnes, A.: On Some Problems of Diophantine Programming. In: Cahiers du Centre L'Etudes de Recherche Opérationelle, Jg. 4 (1962), S.215-280.

Bidlingmaier, J.: Zielkonflikte und Zielkompromisse im unternehmerischen Entscheidungsprozeß (Studienreihe Betrieb und Markt, Bd. XI). Wiesbaden 1968.

Bloech, J.: Investitions-Strategien für Fahrzeuge und andere verschleißende industrielle Anlagen. In: Kostenrechnungspraxis. Zeitschrift für Betriebsabrechnung, Kostenrechnung und -planung, Nr. 4(1969), S.245-258.

Bloech, J.: Zum Problem der Rentabilitätsmaximierung. In: Beiträge zur Unternehmensführung und Unternehmensforschung. Festschrift für W.F. Riester zum 70. Geburtstag gewidmet von Fachkollegen, Schülern und Freunden. Hrsg. v. R. Schwinn. Würzburg, Wien 1972, S.185-210.

Bloech, J.: Untersuchung der Aussagefähigkeit mathematisch formulierter Investitionsmodelle mit Hilfe einer Fehlerrechnung. Diss. Göttingen 1966.

Bloech,J.; Ihde, G.B.: Betriebliche Distributionsplanung. Zur Optimierung der logistischen Prozesse. Würzburg, Wien 1972.

Blohm,H.; Lüder, K.: Investition. Schwachstellen im Investitionsbereich des Industriebetriebes und Wege zu ihrer Beseitigung. 2. neubearb. Aufl.,München 1972.

Blumentrath, U.: Investitions- und Finanzplanung mit dem Ziel der Endwertmaximierung. (Schriften zur theoretischen und angewandten Betriebswirtschaftslehre. Hrsg. v. L. Pack, Bd. 7), Wiesbaden 1969.

Bohr, K.: Zur Produktionstheorie der Mehrproduktunternehmung. (Beiträge zur betriebswirtschaftlichen Forschung, Bd. 27), Köln, Opladen 1967.

Boulding, K.-E.: Time and Investment. In: Economica, Vol.3 (1936), S.196-220.

Bowman, V. J.; Nemhauser, G.L.: A Finiteness Proof for Modified Dantzig Cuts in Integer Programming. In: Naval Research Logistics Quarterly, Vol.17 (1970), S.309-313.

Bowman, V. H.; Nemhauser, G. L.: Deep Cuts in Integer Programming. Core decision paper no. 6925. Center of Operations Research and Econometrics. Heverlee, 1969.

Bradley, G.: Transformation of Integer Programs to Knapsack Problems. In: Discrete Mathematics, Jg. 1 (1971), S.29-45.

Brandt, H.: Investitionspolitik des Industriebetriebs. Wiesbaden 1959.

Brauer, K. M.: Binäre Optimierung. Untersuchung und Weiterentwicklung eines Verfahrens zur Analyse betriebswirtschaftlicher Entscheidungsprobleme bei zweiwertigen Alternativen und ökonomisch unteilbaren Objekten. (Schriftenreihe Annales Universitatis Saraviensis. Heft 43), Köln u. a.O., 1969.

Briel, H. v.: Die Ermittlung der wirtschaftlichen Nutzungsdauer von Anlagegütern. Zürich 1955.

Buhr, W.: Dualvariable als Kriterium unternehmerischer Planung. Die Bedeutung der Dualitätsbeziehungen des mathematischen Programmierens für die entscheidungsbezogene Theorie der Unternehmung (Schriften zur wirtschaftswissenschaftlichen Forschung, Bd. 2o). Meisenheim/Glan 1967.

Burdet, C.-A.: Enumerative Inequalities in Integer Programming. In: Mathematical Programming, Vol. 2 (1972), S.32-64.

Burkard, R. E.: Methoden der ganzzahligen Optimierung. Wien, New York 1972.

Cabot, A. V.: An Enumeration Algorithm for Knapsack Problems. In: Operations Research, Vol. 18 (1970), S.306-311.

Charnes, A.; Cooper, W. W.; Miller, M. H.: Application of Linear Programming to Financial Budgeting and the Costing of Funds. In: Journal of Business, Vol. 32 (1959), S.20-46.

Churchman, C. W.; Ackoff, R. L.; Arnoff, E. L.: Operations Research. Eine Einführung in die Unternehmensforschung. 4. Aufl. München-Wien 1968.

Dakin, R. J.: A Tree-Search Algorithm for Mixed Integer Programming Problems. In: The computer Journal, Jg. 8 (1965), S.250-255.

Dantzig, G.B.: Lineare Programmierung und Erweiterungen. Berlin, u.a.O., 1966.

Dantzig, G.B.: Note on Solving Linear Programs in Integers. In: Naval Research Logistics Quarterly. Vol. 6 (1959), S. 75 f.

Dantzig, G.B.: On the Significance of Solving Linear Programming Problems with Some Integer Variables. In: Econometrica, Jg. 28 (1960), S. 30-44.

Dantzig, G.B.; Ford, L., jr.; Fulkerson, D.R.: A Primal-Dual Algorithm for Linear Programs. In: Linear Inequalities and Related Systems. Hrsg. v. H.W. KUHN und A.W. TUCKER. Princeton 1956, S. 171-181.

Dean, J.: Capital Budgeting. 7. Aufl., New York 1964.

Deppe, H.-D.: Betriebswirtschaftliche Grundlagen der Geldwirtschaft, Bd. 1: Einführung und Zahlungsverkehr. Stuttgart 1973.

Deutsch, P.: Grundfragen der Finanzierung im Rahmen der betrieblichen Finanzwirtschaft. Wiesbaden 1962.

Dinkelbach, W.: Art. Entscheidungsmodelle. In: Handwörterbuch der Organisation. Hrsg. v. E. Grochla, Stuttgart 1959, Spalte 485-496.

Dinkelbach, W.; Hax, H.: Die Anwendung der gemischt ganzzahligen linearen Programmierung auf betriebswirtschaftliche Entscheidungsprobleme. In: Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, Jg. 14 (1962), S.179-196.

Dinkelbach, W.; Steffens, F.: Gemischt ganzzahlige lineare Programme zur Lösung gewisser Entscheidungsprobleme. In: Unternehmensforschung, Jg. 5 (1961),S.3-14.

Driebeek, N. J.: An Algorithm for the Solution of Mixed Integer Programming Problems. In: Management Science,Jg. 12(1966), S.576-587.

Echols,R.E.; Cooper, L.: The Solution of Integer Linear Programming Problems by Direct Search. In: Journal of the ACM, Vol.15 (1968), S.75-84.

Eichhorn, W.: Die Begriffe Modell und Theorie in der Wirtschaftswissenschaft (Teil 1). In: WiSt, Wirtschaftswissenschaftliches Studium, Jg. 1 (1972), S.281-288.

Endebrock, P.: Methoden und Anwendung der gemischtganzzahligen Optimierung. Diplomarbeit, Hannover, o.J.

Engels, W.: Betriebswirtschaftliche Bewertungslehre im Licht der Entscheidungstheorie. (Beiträge zur betriebswirtschaftlichen Forschung. Hrsg. v. E. Gutenberg u.a. Bd. 18), Köln und Opladen 1962.

Escher, G.: Einführung in die Methode Branch and Bound. In: Einführung in die Methode Branch and Bound. Hrsg. v. F. Weinberg.(Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Bd. 4. Hrsg. v. M. Beckmann und H.P. Künzi) Berlin, Heidelberg, New York 1968, S.1-16.

Fleig, W.: Investitionsmodelle als Grundlage der Investitionsplanung. Diss. Frankfurt/M. 1965.

Fleischmann, B.: Duale und primale Schnitthyperebenenverfahren in der ganzzahligen linearen Optimierung. Diss. Hamburg 1970.

Förstner,K.; Henn, R.: Dynamische Produktionstheorie und lineare Programmierung. Meisenheim/Glan 1957.

Franke, G.; Laux, H.: Die Ermittlung der Kalkulationszinsfüße für investitionstheoretische Partialmodelle. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung. N.F., Jg. 20 (1968), S.740-759.

Gale, D.: The Theory of Linear Economic Models. New York, u.a.O., 196o.

Garwin, W. W.: Introduction to Linear Programming. New York 1960.

Gas, B.: Wirtschaftlichkeitsrechnung bei immateriellen Investitionen. Diss. Göttingen 1972.

Gass, S. J.: Linear Programming.Methods and Applications. New York, u.a.O., 1958.

Gerstner, P.: Bilanzanalyse. 11. Aufl., Berlin 1944.

Gilmore, C.; Gomory, R.E.: The Theory and Computation of Knapsack Functions. In: Operations Research, Vol. 14 (1966), S. 1o45-1o74.

Glover, F.: A New Foundation for a Simplified Primal Integer Programming Algorithm. In: Operations Research, Vol.16(1968), S.727-740.

Glover, F.: Cut Search Methods in Integer Programming. In: Mathematical Programming, Vol.3 (1972), S.86-100.

Gomory, R.E.: An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs. In: Recent Advances in Mathematical Programming. Hrsg. v. R.L. Graves u. P. Wolfe, New York u. a.O., 1963, S.269-302.

Gomory, R.E.: An All-integer Integer Programming Algorithm. In: Industrial Scheduling. Hrsg. v. J. F. Muth u. G. L. Thompson. Englewood Cliffs 1963,S.193-206.

Gomory, R.E.: Outline of an Algorithm for Integer Solutionsto Linear Programs. In: Bulletin of the American Mathematical Society 64 (1958), 5,S.275-278.

Gomory, R.E.; Baumol, W. J.: Integer Programming and Pricing. In: Econometrica, Vol.28 (1960),S.521-550.

Gomory, R.E.; Hoffmann, A. J.: On the Convergence of an Integer-Programming Process. In: Naval Research Logistics Quarterly, Vol.10 (1963), S.121-123.

Gräter, H.: Die Auswahl optimaler Entwicklungsprogramme unter Berücksichtigung von Investitions-, Produktions- und Absatzinterdependenzen. Frankfurt/M., Zürich 1972.

Greenberg, H.: Integer Programming. New York, London 1971.

Greenberg, H.; Hegerich, R.L.: A Branch Search Algorithm for the Knapsack Problem. In: Management Science, Jg. 16 (1970), Serie A, S.327-332.

Grün, O.: Art. Entscheidung. In: Handwörterbuch der Organisation. Hrsg. v. E. Grochla, Stuttgart 1959, Sp.474-484.

Grünewälder, O.: Mittel der Liquiditätskontrolle in industriellen Unternehmungen. Diss. Mannheim 1965.

Gutenberg, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre. Band 1, Die Produktion.(Enzyklopädie der Rechts- und Staatswissenschaft. Hrsg. v. W. Kunkel u.a. Abt. Staatswissenschaft) 12. Aufl., Berlin, Heidelberg, New York 1966.

Gutenberg, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre. Band 3, Die Finanzen. (Enzyklopädie der Rechts- und Staatswissenschaft. Hrsg.v. W. Kunkel u.a. Abt. Staatswissenschaft) Berlin, Heidelberg, New York 1969.

Gutenberg, E.: Über einige Fragen der neueren Betriebswirtschaftslehre. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 1966, Ergänzungsheft.

Haberstock, L.: Zur Integrierung der Ertragsbesteuerung in die simultane Produktions-, Investitions- und Finanzierungsplanung mit Hilfe der linearen Programmierung. (Schriftenreihe Annales Universitatis Saraviensis. Rechts- und Wirtschaftswissenschaftliche Abteilung), Köln u.a.O., 1971.

Hadley, G.: Linear Programming. London 1962.

Hadley, G.: Nichtlineare und dynamische Programmierung. Würzburg, Wien 1969.

Härle, D.: Finanzierungsregeln und Liquiditätsbeurteilung. In: Finanzierungshandbuch. Hrsg. v. H. Janberg, 2. Aufl. 1970, S.89-110.

Härle, D.: Finanzierungsregeln und ihre Problematik. Wiesbaden 1961.

Haldi, J.; Isaacson, L. M.: A Computer Code for Solutions to Linear Programs. In: Operations Research. Vol. 13 (1965), S.946-959.

Haupt, P.; Wegener, H.: Wirtschaftlicher Inhalt eines ausgewählten Optimierungs-Verfahrens. In: WiSt (Wirtschaftswissenschaftliches Studium) Jg. 2 (1973), S.8-14.

Hax, H.: Bewertungsprobleme bei der Formulierung von Zielfunktionen für Entscheidungsmodelle. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Jg. 19 (1967), S.749-761.

Hax, H.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Jg. 16(1964), S.430-446.

Hax, H.: Investitionstheorie. Würzburg, Wien 1970.

Hax, H.: Die Koordination von Entscheidungen. Ein Beitrag zur betriebswirtschaftlichen Organisationslehre. (Schriftenreihe Annales Universitatis Saraviensis. Rechts- und Wirtschaftswissenschaftliche Abteilung), Köln u.a.O., 1965.

Hax, H.; Laux, H .: Investitionstheorie. In: Beiträge zur Unternehmensforschung, gegenwärtiger Stand und Entwicklungstendenzen. Hrsg. v. G. Menges. Würzburg, Wien 1969, S. 227-284.

Hax, K.: Die langfristigen Finanzdispositionen. Kapitalbedarfsrechnung und Finanzierung. In: Handbuch der Wirtschaftswissenschaften. Bd. 1, Betriebswirtschaft. Hrsg. v. K. Hax und Th. Wessels, Köln, Opladen 1958, S.453-542.

Hax, K.: Die Kapitalwirtschaft des wachsenden Industrieunternehmens. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Jg. 16 (1964), S.252-279.

Heinen, E.: Zum Begriff und Wesen der betriebswirtschaftlichen Investition. In: Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis, Jg. 9 (1957),S.16-31 und S.85-93.

Heinen, E.: Einführung in die Betriebswirtschaftslehre. Wiesbaden 1968.

Heinen, E.: Die Zielfunktion der Unternehmung. In: Zur Theorie der Unternehmung. Festschrift zum 65. Geburtstag von E. Gutenberg. Hrsg. v. H. Koch, Wiesbaden 1962, S.9-71.

Heister, M.: Die Rentabilitätsanalyse von Investitionen. Ein Beitrag zur Wirtschaftlichkeitsrechnung.(Beiträge zur betriebswirtschaftlichen Forschung, Bd. 17), Köln, Opladen 1962.

Henderson, J. M.; Quandt, R. E.: Mikroökonomische Theorie. Eine mathematische Darstellung. 2. Aufl. Berlin, Frankfurt/M. 1970.

Henn, R.; Künzi, H.P.: Einführung in die Unternehmensforschung II, Berlin, Heidelberg, New York 1968.

Hu, T.C.: Ganzzahlige Programmierung und Netzwerkflüsse (Deutsche Übersetzung v. H.P. Künzi u.a.), München, Wien 1972.

Hu, T.C.: Integer Programming and Network Flows. Menlo Park u. a.O., 1969.

Ihde, G.-B.: Grundlagen der Rationalisierung. Theoretische Analyse und praktische Probleme (Betriebswirtschaftliche Studien Nr. 8), Berlin 1970.

Ihde, G.-B.: Zur Behandlung zweiwertiger Entscheidungen. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 38 (1968), S.93-104.

Jacob, H.: Investitionsplanung und Investitionsentscheidung mit Hilfe der Linearprogrammierung. 2. erw. Aufl. Wiesbaden 1971.

Jacob, H.: Neuere Entwicklungen in der Investitionsrechnung. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 34 (1964), S.487-507 und S.551-594.

Jacob, H.: Zum Problem der Unsicherheit bei Investitionsentscheidungen. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 37 (1967), S.153-187.

Jaeschke, G.: Branching and Bounding. Eine allgemeine Methode zur Lösung kombinatorischer Probleme. In: Ablauf- und Planungsforschung, Jg. 5 (1964), S.133-155.

Janberg, H.: Finanzierung und Finanzpolitik. In: Finanzierungshandbuch . Hrsg. v. H. Janberg, 2. Aufl. Wiesbaden 1970, S.25-63.

Joksch, H. C.: Lineares Programmieren. 2. Aufl. Tübingen 1965.

Judin, D. B.; Golstein, E.G.: Lineare Optimierung I. (Elektronisches Rechnen und Regeln. Hrsg. v. H. Frühauf u.a., Sonderband 6), Berlin 1968.

Kahle, E.: Zielplanung durch Anspruchsanpassung. In: Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis. Jg. 23 (1971), S.623-643.

Katona, G.: Das Verhalten der Verbraucher und Unternehmer. (Deutsche Übersetzung), Tübingen 1960.

Keifer, R.: Der Kalkulationszinsfuß und investitionstheoretische Entscheidungsmodelle. Diss. Mannheim 1970.

Kelley, J. E. Jr.: The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs. In: Siam, Journal of Applied Mathematics, Jg. 8 (1960), S. 703-712.

Kilger, W.: Kritische Werte in der Investitions- und Wirtschaftlichkeitsrechnung. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 35 (1965), S.338-353.

Klauss, H. K.: Konkursordnung. Ludwigshafen am Rhein 1963.

Klein, H. K.: Heuristische Entscheidungsmodelle. Neue Techniken des Programmierens und Entscheidens für das Management. (Die Betriebswirtschaft in Forschung und Praxis. Bd. 9, Hrsg. v. E. Heinen), Wiesbaden 1971.

Koch, H.: Betriebliche Planung. Wiesbaden 1961.

Koch, H.: Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnung. Probleme der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre. Wiesbaden 1970.

Koch, H.: Art. Planung. In: Handwörterbuch der Betriebswirtschaft. Hrsg. v. H. Seischab und K. Schwantag, Bd. 3, 3. Aufl., Stuttgart 1960, Spalte 4340-4352.

Koch, H.: Über eine allgemeine Theorie des Handelns. In: Zur Theorie der Unternehmung. Festschrift zum 65. Geburtstag von E. Gutenberg. Hrsg. v. H. Koch, Wiesbaden 1962, S.367-423.

Köhne, M.: Theorie der Investition in der Landwirtschaft. (Berichte über Landwirtschaft. Zeitschrift für Agrarpolitik und Landwirtschaft. 182. Sonderheft), Hamburg, Berlin 1966.

Kolesar, P.J.: A Branch and Bound Algorithm for the Knapsack Problem. In: Management Science,Jg. 13 (1967), Serie A, S. 723-735.

Koopmans, T. C.: Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities. In: Activity Analysis of Production and Allocation. Hrsg. v. T.C. Koopmans, New York 1951, S.33-97.

Korbut, A.A.; Finkelstein, J.J.: Diskrete Optimierung. (Elektronisches Rechnen und Regeln. Hrsg. v. H. Frühauf u.a., Sonderband 14), Berlin 1971.

Korte, B.: Ganzzahlige Programmierung - Ein Oberblick. In: Unternehmensforschung heute.
Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems. Hrsg. v.M. Beckmann und H.P. Künzi. Bd. 5o, Berlin, Heidelberg, New York 1971, S.61-127.

Korte, B.; Krelle, W.; Oberhofer, W.: Ein lexikographischer Suchalgorithmus zur Lösung allgemeiner ganzzahliger Programmierungsaufgaben. In: Unternehmensforschung, Bd. 13 (1969), Teil I, S.73-98, Teil II, S.171-192. Nachtrag Unternehmensforschung, Bd. 14, S. 228-234.

Kosiol, E.: Finanzplanung und Liquidität. In: Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, N.F. Jg. 7 (1955), S.251-271.

Krekó, B.: Lehrbuch der linearen Optimierung. 4. Aufl. Berlin 1969.

Krelle, W.: Diskussionsbeitrag. In: Kapitalbildung und Kapitalverwendung. Schriften des Vereins für Sozialpolitik, Bd. 5, Berlin 1953, S. 1o7.

Krelle, W.: Ganzzahlige nichtlineare Programmierung für trennbare Funktionen. In: Operations Research Verfahren. Hrsg. v. R. Henn, Bd. 5, 1968, S. 22o-236.

Krelle, W.: Preistheorie. Tübingen, Zürich 1951.

Krelle, W.; Künzi, H. P.: Ganzzahlige Programmierungen. Theorie und Anwendungen in der Praxis. In: Unternehmensforschung, Jg. 2 (1958), S.161-175.

Krelle, W.; Künzi, H. P.: Lineare Programmierung. Zürich 1958.

Kreuzberger, H.: Verfahren zur Lösung ganzzahliger linearer Optimierungsprobleme. Diss. Darmstadt 1969.

Künzi, H. P.; Krelle, W.: Einführung in die Mathematische Optimierung. Zürich 1969.

Künzi, H. P.; Oettli, W.: Integer Quadratic Programming. In: Recent Advances in Mathematical Programming. Hrsg. v. R. L. Graves u. P. Wolfe, New York, u. a.O., S.303-308.

Künzi, H. P.; Krelle, W.: Nichtlineare Programmierung. (Monographien zur Unternehmensforschung, Hrsg. v. A. Jaeger u.a., Bd. 1). Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962.

Kuhn, H. W.; Tucker, A. W.: Non-linear Programming. In: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Hrsg. v. J. Neyman. Berkeley, (Cal.) 1951, S. 481-492.

Kyed, N.: Ein Algorithmus für ein verallgemeinertes Knapsack-Problem. In: Einführung in die Methode Branch and Bound. Hrsg. v. F. Weinberg. Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Bd. 4, Berlin, Heidelberg, New York 1968, S. 59-72.

Land, A. H.; Doig, A.G.: An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. In: Econometrica, Vol. 28 (1960), S.497-520.

Langer, H.: Die Bestimmung des optimalen Investitionsprogramms für Mehrproduktbetriebe mit Hilfe des Linear Programming. Diss. Mainz 1962.

Laux, H.: Flexible Investitionsplanung. Einführung in die Theorie der sequentiellen Entscheidungen bei Unsicherheit. Opladen 1971.

Laux, H.: Flexible Planung des Kapitalbudgets mit Hilfe der linearen Programmierung. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Jg. 21 (1969), S. 728-742.

Laux, H.: Kapitalkosten und Ertragssteuern. Köln u. a.O., 1969.

Laux, H.; Franke, G.: Der Erfolg im betriebswirtschaftlichen Entscheidungsmodell. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 40 (1970), S.31-52.

Laux, H.; Franke, G.: Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe von Kapitalwerten. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Jg. 21 (1969), S.43-56.

Laux, H.; Franke, G.: Das Versagen der Kapitalwertmethode bei Ganzzahligkeitsbedingungen. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Jg. 22 (1970), S.517-527.

Lawler, E. L.; Wood, D. E.: Branch and Bound Methods. A Survey. In: Operations Research, Vol.14(1966) S.699-719.

Lehrbuch der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften. Hrsg. v. H. Körth u.a., Opladen 1972.

Lemke, C. E.: The Dual Method of Solving the Linear Programming Program. In: Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 1 (1954), S. 36-47.

Lemke, C.E.; Spiegelberg, K.: Direct Search Algorithm for Zero-One and Mixed Integer Programming. In: Operations Research, Vol. 15 (1967), S.892-914.

Lindner, L.: Grundlagen und Bedeutung von Algorithmen zur ganzzahligen linearen Programmierung. Diss. Berlin 1972.

Little, J. D. C.; Murty, K. A.; Sweeny, D. W.; Karel, K.: An Algorithm for the Travelling Salesman Problem. In: Operations Research, Vol. 11 (1963), S.972-989.

Lorie, J. H.; Savage, L. J.: Three Problems in Rationing Capital. In: Journal of Business, Vol. 27 (1955), S.229-239.

Lücke, W.: Bemerkungen zum Investitionstypus und zum Problem der Zwischenanlage. In: Beiträge zur Unternehmensführung und Unternehmensforschung. Festschrift für W. F. Riester zum 70. Geburtstag gewidmet von Fachkollegen, Schülern und Freunden. Hrsg. v. R. Schwinn. Würzburg, Wien 1972, S.165-184.

Lücke, W.: Finanzplanung und Finanzkontrolle in der Industrie. Systematische Darstellung der Grundlagen. Wiesbaden 1965.

Lücke, W.: Die Finanzplanung im Rahmen der betrieblichen Finanzpolitik. In: Essays in Honour of Antonio de Viti de Marco. Hrsg. v. Cacucci, Bari 1972, S.307-328.

Lücke, W.: Investitionsrechnung - aber wie? In: Der Volkswirt, Wirtschafts- und Finanzzeitung, Jg. 19 (1965),S.152-153.

Lücke, W.: Investitionsrechnungen auf der Grundlage von Ausgaben und Kosten? In: Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, N.F., Jg. 7 (1955), S.310-324.

Lücke, W.: Die Liquidität im Entscheidungsmodell. In: Gegenwartsfragen der Unternehmensführung. Festschrift zum 65. Geburtstag von W. Hasenack. Hrsg. v. H. J. Engeleiter, Herne-Berlin 1966, S.323-345.

Lücke, W.: Produktions- und Kostentheorie. 2. durchges. Aufl., Würzburg, Wien 1970.

Lüder, K.: Zur Anwendung neuerer Algorithmen der ganzzahligen linearen Programmierung. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft. Jg. 39 (1969), S.405-434.

Lüder, K., Streitferdt, L.: Die Bestimmung optimaler Portefeuilles unter Ganzzahligkeitsbedingungen. In: Zeitschrift für Operations Research. Bd. 16 (1972), Serie B, S. B 89-113.

Lutz, F. A. und V.: The Theory of Investment of the Firm. Princeton 1951.

Manne, A. S.: Scheduling of Petroleum Refinery Operations. In: Havard Economic Studies, Vol. 98 (1956), S.158-171.

Markowitz, H. M.; Manne, A. S.: On the Solution of Discrete Programming Problems. In: Econometrica, Jg. 25 (1957), S.84-110.

Massé, P.: Le Choix des investissements- Critêres et méthodes. Paris 1959.

Massé, P.; Gibrat, R.: Application of Linear Programming to Investments in the Electric Power Industry. In: Management Science. Vol. 3 (1957), S.149-166.

Means, G. C.: Collective Enterprise and Economic Theory. In: Die Konzentration in der Wirtschaft, Bd. 3. Hrsg. v. H. Arndt, Berlin 1960, S. 1523-1543.

Meyhak, H.: Simultane Gesamtplanung im mehrstufigen Mehrproduktunternehmen. Ein Modell der dynamischen linearen Planungsrechnung. Wiesbaden 1970.

Mitten, L. G.: Branch-and-Bound Methods: General Formulation and Properties. In: Operations Research. Vol. 18 (1970), S.24-34.

Modigliani, F.; Miller, M. H.: The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment. In: The American Economic Review. Vol. 48 (1958), S.261-297.

Moxter, A.: Die Bestimmung des Kalkulationszinsfußes bei Investitionsentscheidungen. Ein Versuch zur Koordination von Investitions- und Finanzierungslehre. In: Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung. N. F., Jg. 13 (1961), S.186-200.

Moxter, A.: Methodologische Grundfragen der Betriebswirtschaftslehre, Köln 1957.

Moxter, A.: Der Einfluß der Amortisationsgeschwindigkeit auf die unternehmerische Investitionsentscheidung. In: Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, Jg. 11 (1959), S.541-562.

Moxter, A.: Lineares Programmieren und betriebswirtschaftliche Kapitaltheorie. In: Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, Jg. 15 (1963), S.285-309.

Mülhaupt, L.: Der Bindungsgedanke in der Finanzierungslehre unter besonderer Berücksichtigung der holländischen Finanzierungsliteratur. Wiesbaden 1966.

Müller, O.: Exakte und heuristische Methoden zur Lösung von Reihenfolgeproblemen. In: Nievergelt, E., u.a.: Praktische Studien zur Unternehmensforschung (Ökonometrie und Unternehmensforschung. Bd. 14. Hrsg. v. M. Beckmann u.a.), Berlin u.a.O., 197o.

Müller-Merbach, H.: Modifikationen von Cutting-Plane-Methoden der ganzzahligen Optimierung. In: Proceedings in Operations Research. Hrsg. v. M. Henke u.a., Würzburg, Wien 1972, S.747-787.

Müller-Merbach, H.: Operations-Research.Methoden und Modelle der Optimalplanung. 2. Aufl., München 1971.

Müller-Merbach, H.: Optimale Reihenfolgen. (Ökonometrie und Unternehmensforschung. Bd. XV. Hrsg. v. M. Beckmann u.a.).Berlin, Heidelberg, New York 1970.

Nemhauser, G.L.: Einführung in die Praxis der dynamischen Programmierung. München-Wien 1969.

Niemeyer, G.: Einführung in die lineare Planungsrechnung mit ALGOL- und FORTRAN-Programmen. Berlin 1968.

Niemeyer, G.: Investitionsentscheidungen mit Hilfe der elektronischen Datenverarbeitung. Berlin 1970.

Noltemeier, H.: Auswahlprobleme. In: Operations Research Verfahren. Bd. 9. Hrsg. v. R. Henn. Meisenheim/Glan 1971,S.73-83.

Operationsforschung. Mathematische Grundlagen, Methoden und Modelle. Hrsg. v. W. Dück und M. Bliefernich. Berlin 1971.

Ouyahia, M. A.: Programmes Lineaires A Variables Discretes. In: Revue Francaise de Recherche Operationelle, Jg. 6 (1962), S.55-75.

Ott, A. E.: Preistheorie. In: Kompendium der Volkswirtschaftslehre, Band 1. Hrsg. v. W. Ehrlicher u.a., 2. Aufl. Göttingen 1969, S.124-192.

Pack, L.: Betriebliche Investition. Begriff- Funktion- Bedeutung- Arten. Wiesbaden 1959.

Pack, L.: Maximierung der Rentabilität als preispolitisches Ziel. In: Zur Theorie der Unternehmung. Festschrift zum 65. Geburtstag von E. Gutenberg. Hrsg. v. H. Koch, S.73-135.

Peters, G.: Ziele und Methoden der dynamischen Investitionsrechnung. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 41 (1971), S.335-352.

Piehler, J.: Ganzzahlige lineare Optimierung. Methoden und Probleme. (Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek. Band 45), Leipzig 1970.

Richter, R.: Preistheorie. Wiesbaden 1963.

Roy, B.; Benayoun, R.; Tergny, J.: From S.E.P. Procedure to the Mixed Ophelie Program. In: Integer and Nonlinear Programming. Hrsg. v. J. Abadie. Amsterdam, London 1970, S.419-436.

Rubin, D. S.; Graves, R. L.: The Modified Dantzig Cuts for Integer Programming. Working Paper. Presented at the 7th Mathematical Programming Symposium. The Hague 1970.

Rubow, G.: Die Lösung von Reihenfolgeproblemen aus dem Bereich der Maschinenbelegungsplanung mit Hilfe des Branch and Bound Algorithmus. (Berichte aus dem Institut für Statistik und Versicherungsmathematik und aus dem Institut für Angewandte Statistik der Freien Universität Berlin. Hrsg. v. H. Münzner u. W. Wetzel, Heft 8) Würzburg 1969.

Saaty, T. L.: Optimization in Integers and Related Extremal Problems. New York u.a.O., 1970.

Sasieni, M.; Yaspan, A.; Friedman, L.: Methoden und Probleme der Unternehmensforschung. Operations Research. Würzburg 1962.

Seelbach, H.: Planungsmodelle in der Investitionsrechnung. (Unternehmensforschung für die Wirtschaftspraxis. Hrsg. v. A. Adam, Einzelschrift Nr.8), Würzburg, Wien 1967.

Shareshian, R.: User's Manual: Branch-and-Bound Mixed-Integer Programming. BBMIP. IBM General Program Library. Program Information Department 1967.

Sieben, G.: Wie bestimmt man die optimale Nutzungsdauer von Anlagegütern? In: Kostenrechnungspraxis. Zeitschrift für Betriebsabrechnung und -planung. Nr. 3 (1958), S. 129-134.

Suchowitzki, S.I., Awdejewa, L.I.: Lineare und konvexe Programmierung. München, Wien 1969.

Swoboda, P.: Investition und Finanzierung. (Betriebswirtschaftslehre im Grundstudium der Wirtschaftswissenschaft. Bd. 3), Göttingen 1971.

Swoboda, P.: Die Ermittlung optimaler Investitionsentscheidungen durch Methoden des Operations Research. Eine Stellungnahme zum Aufsatz von H. Albach: "Rentabilität und Sicherheit als Kriterien betrieblicher Investitionsentscheidungen" In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft. Jg. 31 (1961), S. 96-103.

Swoboda, P.: Die simultane Planung von Rationalisierungs- und Erweiterungsinvestitionen und von Produktionsprogrammen. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft. Jg. 35 (1965), S. 148-163.

Schindler, H.: Investitionsrechnungen in Theorie und Praxis. 3. Aufl. Meisenheim/Glan 1966.

Schmidt, B.: Ganzzahlige lineare Optimierung und das Knapsack-Problem. In: Operations Research Verfahren. Hrsg. von R.Henn u.a., Bd. 10, 1971, S. 175-180.

Schneider, D.: Investition und Finanzierung. Lehrbuch der Investitions-, Finanzierungs- und Ungewißheitstheorie. (Moderne Lehrtexte. Wirtschaftswissenschaften. Bd. 4), Köln, Opladen 1970.

Schneider, D.: Zielvorstellungen und innerbetriebliche Lenkungspreise in privaten und öffentlichen Unternehmen. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung. N.F. Jg. 18 (1966), S. 260-275.

Schneider, E.: Einführung in die Wirtschaftstheorie, Teil II, 10. Aufl. Tübingen 1965.

Schneider, E.: Einführung in die Wirtschaftstheorie, Teil IV, Bd. 1, 2. Aufl. Tübingen 1965.

Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung. Theorie der Investition. 4. durchges. Aufl., Tübingen, Zürich 1962.

Schwarz, H.: Optimale Investitionsentscheidungen. München 1967.

Schweim, J.: Integrierte Unternehmensplanung (Bochumer Beiträge zur Unternehmensführung und Unternehmensforschung. Hrsg. v. H.Besters u.a., Bd. 5), Bielefeld 1969.

Stackelberg, H. v.: Grundlagen der theoretischen Volkswirtschaftslehre. 2. Aufl.,Tübingen, Zürich 1951.

Stützel, W.: Art. Liquidität. In: Handwörterbuch der Sozialwissenschaften. Bd. 6, Stuttgart, Tübingen, Göttingen 1959, S. 622-629.

Stuhr, R.: Anwendungen und Lösungsverfahren der ganzzahligen linearen Programmierung. Diss. Göttingen 1964.

Stuhr, R.: Das Rationalitätsprinzip in Beziehung zu den Prinzipien der Rentabilitäts- und Gewinnmaximierung. In: Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis. Jg. 17 (1965), S. 290-307.

Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy. New York u.a.O., 1949.

Terborgh, G.: Leitfaden der betrieblichen Investitionspolitik. Deutsche Obersetzung und Bearbeitung von H. Albach, Wiesbaden 1969.

Terborgh, G.: MAPI Replacement Manual. For the Attainement of a Dynamic Equipment Policy. Chicago, (Ill.) and Crawfordsville, (Ind.) 1950.

Terebesi, M.: Bemerkungen zum Verfahren Gomory zur Bestimmung ganzzahliger Lösungen von linearen Programmen. In: Unternehmensforschung Bd. 5 (1961), S. 197-215.

Trauth, J.R., Woolsey, R.E.: Practical Aspects of Integer Linear Programming. 30. ORSA Tagung. Durham, N.C. October 1966, S. 10-14.

Ungnade, D.: Das rentenmarktpolitische Instrumentarium. In: Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen. Jg. 25 (1972), S.952-954.

Vormbaum, H.: Finanzierung der Betriebe. 2. Aufl., Wiesbaden 1971.

Weingartner, H.M.: Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems. 2. Aufl., Englewood Cliffs (N.J.) 1964.

Weston, F.J., Brigham, E.F.: Managerial Finance. 3. Aufl., London u.a.O., 1970.

Wilson, R.B.: Stronger Cuts in Gomory's All-integer Integer Programming Algorithm. In: Operations Research, Vol. 15 (1967), S. 155-157.

Wissenbach, H.: Die Bedeutung der Finanzierungsregeln für die betriebliche Finanzpolitik. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung. N.F. Jg. 16 (1964), S. 447-456.

Witte, E.: Forschung, Werbung und Ausbildung als Investitionen. In: Hamburger Jahrbuch für Wirtschafts- und Gesellschaftspolitik. Hrsg. v. O. Ortlieb, Bd. 7, Tübingen 1962, S. 210-226.

Witte, E.: Die Liquiditätspolitik der Unternehmung. Tübingen 1963.

Wittmann, W.: Unternehmung und unvollkommene Information. Köln und Opladen 1959.

Wöhe, G.: Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre. 8. unveränderte Aufl. Berlin, Frankfurt/M. 1968.

Wohlfarth, K., Bley, S.: Grundlagen und Praxis des Wertpapiergeschäfts. 2. neubearb. Aufl., Stuttgart 1971.

Young, R.D.: A Primal (All-integer) Integer Programming Algorithm. In: Journal of the National Bureau of Standards 69B (1965) S. 213-250.

Young, R.D.: A Simplified Primal (All-Integer) Integer Programming Algorithm. In: Operations Research.Vol. 16 (1968), S. 75o-782.

Zwehl, W.v.: Untersuchung zur Erstellung einer Planbilanz als Ergänzung des Jahresabschlusses. Diss. Göttingen 1968.

Lebenslauf

Am 16. April 1943 wurde ich als Sohn des jetzigen Dezernenten im Niedersächsischen Landesverwaltungsamt Hans Wegener und seiner Ehefrau, Dr. med. Dorothea Wegener, geb. Kuhlow, als zweites Kind in Wolmirstedt geboren.

Im Januar 1945 kam meine Mutter durch einen Bombenangriff auf Magdeburg ums Leben.

Nach einer Umsiedlung in den Landkreis Hannover begann Ostern 1949 meine Schulzeit in der Volksschule Hemmingen (Kreis Hannover).

Ostern 1953 wechselte ich zur Bismarck-Schule in Hannover - einem neusprachlichen und mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium für Jungen - und legte dort im Februar 1963 im mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig die Reifeprüfung ab.

Nach einer daran anschließenden 2 1/2 jährigen Banklehre in Hannover, die am 3o. September 1965 mit der Kaufmannsgehilfenprüfung abgeschlossen wurde, begann ich im Wintersemester 1965/66 mit dem Studium der Betriebswirtschaftslehre an der Universität Göttingen.

Am 12. Mai 197o konnte ich die Prüfung für Diplom-Kaufleute ablegen.

In den letzten zwei Semestern meines Studiums konnte ich die Aufgaben eines studentischen Tutors für Betriebswirtschaftslehre wahrnehmen.

Vom 1. Juni 197o bis zum 18. Januar 1973 war ich am Seminar für Betriebswirtschaftslehre der Universität Göttingen (Direktor: Prof. Dr. J. Bloech) als wissenschaftlicher Angestellter tätig und bin dort seit dem 19. Januar 1973 als wissenschaftlicher Assistent beschäftigt.

Hans Wegener

Hans Wegener